

目 录

第一章	引言	1
第二章	场的正则量子化	3
§2.1	经典力学的正则形式及量子化	3
§2.1.1	正则形式	3
§2.1.2	正则量子化	4
§2.2	一维简谐振子的量子化	4
§2.3	场的正则形式和量子化	5
§2.3.1	场的正则形式	5
§2.3.2	场的正则量子化	6
§2.4	对称性和守恒律	7
§2.4.1	Lorentz 变换和角动量守恒律	11
§2.4.2	相因子整体 (非定域) 变换与 “荷” 守恒	14
第三章	标量场的量子化	15
§3.1	实标量场的量子化	15
§3.1.1	对易关系的相对论不变形式 (实标量场)	18
§3.2	复标量场的量子化	18
第四章	矢量场和电磁场的量子化	21
§4.1	基本矢量场的正则量子化	21
§4.2	电磁场 ($U(1)$ 规范场) 的量子化	24
§4.2.1	常用的两种规范条件	25
§4.3	Coulomb Gauge 下光子场的量子化	26
§4.3.1	一般对易关系 (不等时)	27
§4.4	Lorentz Gauge 下的电磁场的量子化	27
第五章	旋量场的量子化	32
§5.1	Dirac 方程及其变换性质	32
§5.2	Dirac 方程的协变形式	33
§5.2.1	单粒子的相对论波方程	34
§5.3	Dirac 方程的平面波解	36
§5.4	旋量场的量子化	39
第六章	场的相互作用和分立对称变换	45
§6.1	电磁相互作用	45
§6.1.1	旋量场与电磁场的相互作用	45
§6.1.2	标量场和电磁场之间的相互作用	46
§6.1.3	电磁相互作用的规范不变性	47
§6.2	相互作用与分立对称变换 (P, C, T)	48
§6.2.1	空间反射变换 $ P$	48
§6.2.2	正反粒子与共轭变换 (Charge Conjugation)	50
§6.2.3	相互作用的 PCT 变换性质	55

第七章 散射矩阵和微扰法	57
§7.1 相互作用表象	57
§7.2 S 矩阵和微扰法	58
§7.3 T 乘积分解为 N 乘积, Wick 定理	60
§7.3.1 Wick 定理	61
§7.4 费曼传播子和费曼图	63
§7.4.1 Feynman Propagator	63
§7.4.2 S 矩阵的微扰展开和费曼图	68
§7.4.3 Feynman 规则	74
§7.4.4 其它 feynman 规则	76
第八章 散射和衰变过程的微扰计算	79
§8.1 散射截面和衰变寿命的一般公式	79
§8.1.1 散射截面	79
§8.1.2 衰变宽度和寿命	80
§8.2 规范不变性和流守恒	83
§8.2.1 矩阵元中含有光子	83
§8.2.2 流守恒的光子传播函数	87
§8.3 几个典型的衰变和散射过程	90
§8.3.1 π 介子的弱衰变	90
§8.4 几种基本的发散过程及相关的数学处理	95
§8.4.1 几种基本的发散	95
§8.4.2 Feynman 积分和 Wick 转动	96
§8.4.3 发散积分与原点移动	97
§8.5 电子自能和质量重整化	100
§8.6 电子自能和电荷重整化, 辐射修正	102
§8.7 真空极化和电荷重整化	106
§8.8 顶角函数和电荷重整化	110
§8.8.1 Ward-Takahashi Identity	112
§8.9 电子被外场散射和电子的反常磁矩	113
§8.9.1 电子的磁矩	114
第九章 关于重整化的一些讨论	116
§9.1 场论中的发散和表面发散度 (Superficial Degree of Divergence)	116
§9.1.1 图形的 Taylor 展开	118
§9.2 重整化和抵消项	120
§9.3 维数正规化 (Dimemssional Regularization)	121

插图目录

7.1	积分路径图	65
7.2	S 矩阵的一阶微扰费曼图 (从小往上看, 逆向为反粒子)	69
7.3	S 二阶微扰费曼图	70
7.4	S 二阶微扰费曼图典型过程分析	72
7.5	内部费米子线	74
7.6	外部费米子线 I	74
7.7	外部费米子线 II	74
7.8	内部光子线	75
7.9	外部光子线	75
7.10	顶角项的贡献	75
7.11	封闭费米子圈	76
7.12	核子 - π 介子作用顶角	76
7.13	介子内线 and 核子内线	76
7.14	顶角	77
7.15	四费米子相互作用	77
7.16	轻子普适性	78
8.1	含有一个外线光子	83
8.2	含有两个外线光子	83
8.3	含有两个外线光子	84
8.4	含有 n 个外线光子	84
8.5	含有 n 个外线光子	84
8.6	在含有 n 个外线光子加入一个光子	85
8.7	在含有 n 个外线光子加入一个光子的不同情况	85
8.8	含有 n 个光子圈中加入一个光子	86
8.9	光子内线	87
8.10	电子 - 电子散射	89
8.11	π^- 介子衰变 $\pi^- \rightarrow \mu + \bar{\nu}_\mu$	91
8.12	τ^- 轻子衰变 $\tau^- \rightarrow \pi^- + \nu_\tau$	93
8.13	电子自能图	95
8.14	光子真空极化图	95
8.15	顶角发散图	96
8.16	积分路径示意图	97
8.17	电子质量重整化	101
8.18	重整化的三种情况	103
8.19	内线电子自能重整化图	104
8.20	内线电子自能重整化简化图	104
8.21	外线电子自能重整化图	105
8.22	外线电子自能重整化简化图	105
8.23	真空极化 Feynman 图	106
8.24	电子 - 电子散射中真空极化	106
8.25	电子自能与真空极化	107

8.26	真空极化的重整化图	107
8.27	真空极化圈图	109
8.28	真空极化外线光子的二次修正	109
8.29	顶角的一次修正和三级修正	110
8.30	电子外场散射的修正项和抵消项	113
8.31	QED 和 QCD 中真空极化	114
9.1	超可重整的例子 $\lambda\varphi^3$	117
9.2	收敛性判定的例子 $\lambda\varphi^3$	118
9.3	收敛性判定的例子 $\lambda\varphi^3$	118
9.4	$\lambda\varphi^3$ 自能图	119
9.5	$\lambda\varphi^4$ 自能图	119
9.6	连接两条标量外线 $\lambda\varphi^4$ 的发散分析图	120
9.7	连接四条标量外线 $\lambda\varphi^4$ 的发散分析图	121
9.8	含费米子内线 $\lambda\varphi^3$ 的发散分析图	121
9.9	含费米子内线光子的发散分析图	121
9.10	介子自能图	122

第一章 引言

一、量子场论的提出（微观粒子场的量子性，所有微观粒子是某一个场的量子）

1. 微观（低速）现象研究——量子力学建立

(1.1) 电子（1887）→

(1.2) 原子核有核模型（1915 年）→

(1.3) 波尔提出旧的量子论（1913 年）

2. 高速（宏观）现象的研究——狭义相对论

(2.1) 1931 年， β 衰变： $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$

(2.2) 1932 年，中子的发现，核的放射性， α, β, γ 衰变

(2.3) 1932 年，正电子的发现： $\gamma^* \rightarrow e^+ + e^-$ ， $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$

从 $\frac{E}{c} = \sqrt{p^2 + m^2 c^2}$ 可得

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$$

3. 由 NR 近似可以得到自由粒子的薛定谔方程：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$$

4. Klein — Gordon 方程

由于 $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$ ，所以有

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla \quad (1.1)$$

可以得到自由粒子的 Klein — Gordon 方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = c^2 \left(\nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi \quad (1.2)$$

5. Dirac 方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi + c \left(\mathbf{a} \cdot \nabla + \frac{imc}{\hbar} \beta \right) \psi = 0 \quad \rightarrow \psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

其中

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

负能量的困难 $E = \pm \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} \rightarrow$ Dirac 海（真空态）

二、量子场的建立和发展

1. 正则量子化

场 $\rightarrow$ 无穷多自由度的力学体系

场的量子化：标量场，Dirac 场，电磁场

建立 QED

2. 发散困难

高阶微扰修正存在发散困难

- 重整化的引入 (如在电磁作用中将发散效应归结为电子质量和电荷的重新定义)
- 辐射修正: 氢原子的能级 Lam shift, 电子的反常磁矩

3. 标准模型 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

- $SU(3) \rightarrow$ 强相互作用
- $SU(2) \times U(1) \rightarrow$ 电-弱相互作用

(3.1) 弱相互作用: $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$

(3.2) 普适的 Fermi 作用, Lee-Yang(1956) V — A 理论

(3.3) 强相互作用: (如原子核中质子核中子之间的核力) 核力的介子交换理论: $\pi^\pm, \pi^0$ 这是一个有效理论. 强子的夸克模型: 如 $p = uud$, $n = duu$, $\pi^+ = u\bar{d}$, $\pi^- = d\bar{u}$, $\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$.

(3.4) 量子色动力学 (QCD)

和量子电动力学 (QED) 的区别:

- 光子规范场 Abelian 无自相互作用
- 胶子规范场 Noabelian 有自相互作用
- QCD 有渐近自由 (范屏蔽), 色禁闭: 夸克之间相互作用在近距离变得很弱, 夸克近似自由. 夸克之间的相互作用在长距离变得很强, 夸克禁闭在强子中.

三、基本粒子

1. 费米子, 自旋为 1/2

- 夸克 $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$
- 轻子 $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$, $m_\tau = 174.3 \pm 5.1 \text{ GeV}$

2. 规范玻色子, 自旋为 1

电磁作用 $\rightarrow$ 光子, γ (电磁场量子)

强作用 $\rightarrow$ 胶子 g^a ($a = 1, \dots, 8$), 有色自由度, $SU(3)$ 群

弱相互作用 $\rightarrow W^\pm$ $m = (80.419 \pm 0.056) \text{ GeV}$, Z^0 , $m = (91.1882 \pm 0.0022) \text{ GeV}$

$W^+ \rightarrow e^+ \nu_e, \mu^+ \nu_\mu, \tau^+ \nu_\tau, c\bar{s}$, $Z^0 \rightarrow e^+ e^-, \mu^+ \mu^-, \tau^+ \tau^-, \dots$

标量: Higgs Boson

四、单位机制

GS 单位制 (自然单位制): 长度 L, 时间 T, 质量 M 速度 V, 作用量 A, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, 能量 E, GeV

1. 转换关系

$$L = V A E^{-1}, \quad V = L T^{-1}, \quad T = A E^{-1}, \quad A = M L^2 T^{-1}, \quad M = V^{-2} E, \quad E = M L^2 T^{-2}$$

2. 单位转换关系

$$1c = 3.00 \times 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}, \quad 1\text{cm} = 5.25 \times 10^{13} \text{ GeV}^{-1} \cdot c \cdot \hbar$$

$$1\hbar = 1.05 \times 10^{-27} \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1}, \quad 1\text{sec} = 1.52 \times 10^{24} \text{ GeV}^{-1} \cdot \hbar$$

$$1\text{GeV} = 1.60 \times 10^{-3} \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2}, \quad 1\text{g} = 0.562 \times 10^{24} \text{ GeV} \cdot c^{-2}$$

第二章 场的正则量子化

$A_\mu(x), \psi(x), \varphi(x)$ 代表的 Maxwell 方程组、Dirac 方程、Klein — Gordon 方程只能看作场方程。

§2.1 经典力学的正则形式及量子化

§2.1.1 正则形式

Euler — Lagrange 方程:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (2.1)$$

最小作用量原理: $\delta S = 0$

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} L dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right) \right\} dt \\ &\quad \delta q|_{t_1, t_2} = 0 \\ &\quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right) dt = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0 \end{aligned}$$

正则形式 $L(q, \dot{q})$

哈密顿量的定义: $H \equiv \dot{q}P - L = H(P, q), \quad P \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$

$$\begin{aligned} dH &= \dot{q}dP + Pd\dot{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}dq - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}d\dot{q} \\ &= \dot{q}dP - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}dq = \dot{q}dP - \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{q}} \right) dq \\ &= \dot{q}dP - Pd\dot{q} \end{aligned}$$

所以如果将哈密顿量看成坐标和动量的函数, 则可以得到经典力学的正则关系:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \\ \dot{P} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \end{cases} \Rightarrow \text{正则关系}$$

定义泊松括号:

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial P} - \frac{\partial B}{\partial q} \frac{\partial A}{\partial P} \quad (2.2)$$

运动方程为

$$\begin{cases} \dot{q} = \{q, H\} \\ \dot{P} = \{P, H\} \end{cases} \Rightarrow \dot{A} = \{A, H\} \quad (2.3)$$

§2.1.2 正则量子化

假定一切力学量都有算符，并作如下的代换： $\{A, B\} \Rightarrow \frac{1}{i}[A, B]$ $[A, B] \equiv AB - BA$

由经典的定义可以知道：

$$\left. \begin{aligned} \{P, q\} = -1 &\Rightarrow [P, q] = -i \quad (\text{基本对易关系}) & \dot{q} = \{q, H\}, &\Rightarrow \dot{q} = -i[q, H] \\ \dot{P} = \{P, H\}, && \Rightarrow \dot{P} = -i[P, H] \end{aligned} \right\}$$

基本运动方程

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = -i[A, H] \quad (2.4)$$

§2.2 一维简谐振子的量子化

由经典力学可以得到振子的运动方程： $m\ddot{q} = -Kq$ ，拉矢量： $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}Kq^2$ ，从而有：

$$\left\{ \begin{aligned} P &= m\dot{q} \\ H &= \frac{1}{2m}(P^2 + m^2\omega^2 q^2), \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \end{aligned} \right. \quad (2.5)$$

量子化，引入 $[q, p] = i$ ，则有消灭和产生算子：

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(P - im\omega q) \\ \alpha^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(P + im\omega q) \end{aligned} \right. \quad (2.6)$$

从基本的对易关系则有：

$$\begin{aligned} [\alpha, \alpha^\dagger] &= 1 \\ [\alpha, \alpha] &= 0, \quad \alpha^\dagger \text{ is the same} \end{aligned} \quad (2.7)$$

最后可以得到哈密顿量的形式为：

$$H = \frac{1}{2}\omega(\alpha^\dagger\alpha + \alpha\alpha^\dagger) = \omega\left(N + \frac{1}{2}\right) \quad (2.8)$$

其中 $N = \alpha^\dagger\alpha$ 粒子数算符可以设 N 的本征态为 $|n\rangle$ ，则有 $N|n\rangle = n|n\rangle$ ，由于 $N = \alpha^\dagger\alpha$ 为厄米算符，所以 n 必须为实数，同时又由于 N 正定，所以 $n \geq 0$ 。

粒子数算符的对易关系：

$$[N, \alpha] = -\alpha, \quad [N, \alpha^m] = -m\alpha^m \quad [N, \alpha^\dagger] = \alpha^\dagger \quad [N, \alpha^{\dagger m}] = m\alpha^{\dagger m} \quad (2.9)$$

N 的本征值为： $n = 0, 1, \dots$ ，(非负整数)，对应的态为： $|0\rangle, |1\rangle, \dots$ 其中 $|0\rangle$ 为基态。设基态满足归一化条件， $\langle 0|0\rangle = 1$ ，从而可以得到 N 的正交归一的本征态：

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\alpha^{\dagger n}|0\rangle, \quad \langle n|m\rangle = \delta_{nm} \quad (2.10)$$

H 的本征值为： $H = \omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$ ， $N = \alpha^\dagger\alpha$ ，所以： $E_n = \omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ ， $n = 0, 1, \dots$ 。

产生消灭算子的矩阵表示：

$$\langle m|\alpha|n\rangle = \sqrt{n}\delta_{m,n-1} \quad \langle m|\alpha^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\delta_{m,n+1} \quad (2.11)$$

$$\text{所以: } \alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \alpha^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

运动方程为:

$$\dot{\alpha} = i[H, \alpha] = -i\omega\alpha \quad \Rightarrow \alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t} \quad (2.12)$$

$$\dot{\alpha}^\dagger = i[H, \alpha^\dagger] = i\omega\alpha^\dagger \quad \Rightarrow \alpha^\dagger(t) = \alpha_0^\dagger e^{+i\omega t}$$

多自由度体系 $q_i(t)$, $i = 1, \dots, n$

$$\begin{cases} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \end{cases}, \quad \begin{cases} P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \\ H = \sum_{i=1}^n P_i \dot{q}_i - L \end{cases}$$

量子化, 引入对易关系:

$$[P_i, q_j] = -i\delta_{ij}, \quad [P_i, P_j] = 0, \quad [q_i, q_j] = 0 \quad (2.13)$$

$$\text{基本运动方程: } \begin{cases} \dot{P}_i = i[H, P_i] \\ \dot{q}_i = i[H, q_i] \end{cases}$$

§2.3 场的正则形式和量子化

§2.3.1 场的正则形式

经典场的正则形式: $\varphi(x) = \varphi(x, t)$ 【标量场, 矢量场, 旋量场】

拉氏密度 $L(\varphi(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu})$, $\mu = 1, 2, 3, 4$

Lorentz Transformation: $x_\mu \rightarrow x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu$, $x_\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\mathbf{x}, it)$

$x_\mu x_\mu = \mathbf{x}^2 - t^2 = x'_\mu x'_\mu$, 对应不变量

同时, 可以得到:

$$\begin{cases} a_{\mu\lambda} a_{\nu\lambda} = \delta_{\mu\nu} \\ a_{\lambda\mu} a_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu} \quad \lambda = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad (2.14)$$

所以 $(a_{\mu\nu})$ 为正交矩阵。

对于 0, 1, 2, 3 度规: $x_\nu x^\nu = g_{\mu\nu} x_\nu x_\mu = t^2 - \mathbf{x}^2$

其中:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$x^\mu = (t, \mathbf{x})$, $x_\mu = (t, -\mathbf{x})$

拉矢量: $L = \int d\mathbf{x} \mathcal{L}(\varphi(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu})$, 作用量: $S = \int_{t_1}^{t_2} dt L$

运动方程通过最小作用量原理来推导:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x L = \int dt \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi / \partial x_\mu)} \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \int dt \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi / \partial x_\mu)} \right] \delta \varphi + \int dt \int d^3x \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi / \partial x_\mu)} \delta \varphi \right) \\
&= \int dt \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi / \partial x_\mu)} \right] \delta \varphi = 0
\end{aligned}$$

从而推出 Euler — Lagrange Equation

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi / \partial x_\mu)} = 0 \quad (2.16)$$

对于多自由度体系 $\varphi_\gamma(x)$, $\gamma = 1, 2, \dots, n$ 则有

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\gamma} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi_\gamma / \partial x_\mu)} = 0 \quad (2.17)$$

场方程的哈密顿形式:

定义 $\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$, 哈密顿量密度: $\mathcal{H} \equiv \pi \dot{\varphi} - L$

场方程的形式可以表示成:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi / \partial x_i)} \right) - \dot{\pi} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial \varphi / \partial x_i)} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi / \partial x_i)} \end{cases} \quad (2.18)$$

最后:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \\ \dot{\pi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial \varphi / \partial x_i)} \right) \end{cases} \quad (2.19)$$

§2.3.2 场的正则量子化

$$\begin{cases} \varphi_i(t) = \frac{1}{\Delta v_i} \int_{(\Delta v_i)} d\mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}, t) \\ \dot{\varphi}_i(t) = \frac{1}{\Delta v_i} \int_{(\Delta v_i)} d\mathbf{x} \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (2.20)$$

其中 Δv_i 体积元

所以: $L = \int d\mathbf{x} \mathcal{L} \Rightarrow \sum \Delta v_i L_i(\varphi_i(t), \dot{\varphi}_i(t), \varphi_{i\pm a}(t))$

正则坐标: φ_i , 正则动量:

$$P_i(t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i(t)} = \Delta v_i \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \dot{\varphi}_i(t)} = \Delta v_i \pi_i(t) \quad (2.21)$$

哈密顿量为:

$$H = \sum_i \Delta v_i (\pi_i \dot{\varphi}_i - \mathcal{L}_i) \equiv \sum_i \Delta v_i \mathcal{H}_i \quad (2.22)$$

对应到连续的情况: $H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x (\pi \dot{\varphi} - \mathcal{L})$

量子化 (引入对易关系)

$$\begin{aligned}
[\varphi_i(t), \varphi_j(t)] &= [P_i(t), P_j(t)] = 0 \\
[P_i(t), \varphi_j(t)] &= -i\delta_{ij} \Leftrightarrow ([P, q] = -i) \end{aligned} \quad (2.23)$$

从而推出

$$[\pi_i(t), \varphi_j(t)] = -i \frac{\delta_{ij}}{\Delta v_i} \quad (2.24)$$

过渡到连续态中，则得到基本的对易关系：

$$\begin{cases} [\pi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{x}, t)] = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ [\varphi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{x}', t)] = [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

运动方程：

$$\begin{cases} \dot{\pi}(\mathbf{x}, t) = i[H, \pi(\mathbf{x}, t)] \rightarrow \left[-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial \varphi / \partial x_i)} \right) \right]_x \\ \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t) = -i[H, \varphi(\mathbf{x}, t)] \rightarrow \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \right]_x \end{cases} \quad (2.26)$$

对应到多分量场： $\varphi_\gamma(\mathbf{x}), \gamma = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} L &= \int d\mathbf{x} \mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \partial \varphi_\gamma / \partial x_\mu, \dots) \\ \mathcal{H} &= \sum_\gamma \pi_\gamma \dot{\varphi}_\gamma - \mathcal{L}, \quad H = \int d^3x \mathcal{H} \end{aligned} \quad (2.27)$$

相应的对易关系：

$$\begin{cases} [\varphi_\gamma(\mathbf{x}, t), \varphi_s(\mathbf{x}', t)] = [\pi_\gamma(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{x}', t)] = 0 \\ [\pi_\gamma(\mathbf{x}, t), \varphi_s(\mathbf{x}', t)] = -i\delta_{\gamma s} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{cases} \quad (2.28)$$

运动方程：

$$\begin{cases} \dot{\pi}_\gamma(\mathbf{x}, t) = i[H, \pi_\gamma(\mathbf{x}, t)] \\ \dot{\varphi}_\gamma(\mathbf{x}, t) = i[H, \varphi_\gamma(\mathbf{x}, t)] \end{cases} \quad (2.29)$$

从而推出 $\dot{A} = i[H, A], \quad A = A(\varphi_1, \dots, \pi_1, \dots)$

§2.4 对称性和守恒律

对称性：拉氏量对于一定的变换具有不变性。如：空间转动不变性，时空平移不变性，空间反射不变性，电荷共轭不变性等。所有这些不变性都对应着一个守恒量。

Noether 定理：如果拉氏量（因而运动方程）对某一种连续的对称性变换具有不变性，则一定存在某种物理量的守恒律。

时空变换内部变换： $U(1)$ 变换（相因子变换） $\rightarrow$ 电荷守恒

$SU(2)$ 变换（同位旋变换） $\rightarrow$ 同位旋守恒

时空平移不变性——能量动量守恒，空间转动不变性——角动量守恒，空间反射不变性——宇称守恒等。

平移不变性域能量动量守恒： $x_\mu \rightarrow x'_\mu$ ，相应的场 $\varphi_\gamma(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi'_\gamma(\mathbf{x}')$

坐标平移： $x_\mu \rightarrow x'_\mu, x'_\mu = x_\mu + \Delta x_\mu$ （ Δx_μ ：无穷小变量） $\varphi_\gamma(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi'_\gamma(\mathbf{x}') = \varphi_\gamma(\mathbf{x})$ （普遍）

由对称性可知：

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \mathcal{L}(\varphi'_\gamma(\mathbf{x}'), \partial \varphi'_\gamma(\mathbf{x}') / \partial x'_\mu) - \mathcal{L}(\varphi_\gamma(\mathbf{x}), \partial \varphi_\gamma / \partial x_\mu) = 0 \\ \delta \mathcal{L} &= \mathcal{L}(\varphi'_\gamma(\mathbf{x}'), \partial \varphi'_\gamma(\mathbf{x}') / \partial x'_\mu) - \mathcal{L}(\varphi'_\gamma(\mathbf{x}), \partial \varphi'_\gamma(\mathbf{x}) / \partial x_\mu) + \mathcal{L}(\varphi'_\gamma(\mathbf{x}), \partial \varphi'_\gamma(\mathbf{x}) / \partial x_\mu) \\ &\quad - \mathcal{L}(\varphi_\gamma(\mathbf{x}), \partial \varphi_\gamma(\mathbf{x}) / \partial x_\mu) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \Delta x_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\gamma} \delta \varphi_\gamma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \varphi_\gamma(\mathbf{x}) / \partial x_\mu)} \delta(\partial \varphi_\gamma(\mathbf{x}) / \partial x_\mu) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\delta\varphi_\gamma &= \varphi'_\gamma(x) - \varphi_\gamma(x) = \varphi_\gamma(x - \Delta x) - \varphi_\gamma(x) = -\partial\varphi_\gamma/\partial x_\mu \Delta x_\mu \\ \delta(\partial\varphi_\gamma/\partial x_\mu) &= \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\delta\varphi_\gamma(x)) = -\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_\nu}\right)\Delta x_\nu\end{aligned}$$

所以:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu}\Delta x_\mu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\gamma}\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_\mu}\Delta x_\mu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_\gamma/\partial x_\mu)}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_\mu}\right)\Delta x_\nu \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu}\Delta x_\mu - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_\gamma/\partial x_\nu)}\right)\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_\mu}\Delta x_\mu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_\gamma/\partial x_\nu)}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_\nu}\right)\Delta x_\mu \\ &= \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left[\mathcal{L}\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_\gamma/\partial x_\nu)}\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_\mu}\right]\Delta x_\mu \\ &= 0\end{aligned}$$

由于 Δx_μ 任意, 所以:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}T_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \quad (2.30)$$

其中能量动量张量的定义为:

$$T_{\mu\nu} = \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_\gamma/\partial x_\nu)} \quad (2.31)$$

对于 0, 1, 2, 3 度规, 则为:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\partial^\nu\phi_i - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \quad (2.32)$$

附: Lorentz 变换。

$x_\mu \rightarrow x'_\mu = \alpha_{\mu\nu}x_\nu$, $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ 例如:

$$\alpha_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

其中 $x_\mu = (x, ict) = (x, y, z, ict)$

$\cos\theta = \gamma, \sin\theta = i\gamma v/c$, 其中 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

Lorentz 变换关系:

$$\begin{cases} x' = (x - vt)/\sqrt{1-v^2/c^2} \\ y' = y, \quad z' = z \\ t' = (t - vx/c)/\sqrt{1-v^2/c^2} \end{cases} \quad (2.33)$$

物理量 $\varphi_\gamma(x) \rightarrow \varphi'_\gamma(x') \neq \varphi_\gamma(x)$, 但是 $\varphi_\gamma(x) \rightarrow \varphi'_\gamma(x') = \Lambda_{\gamma s}\varphi_s(x)$, 矢量场来说: $\Lambda_{\gamma s} = \alpha_{\gamma s}$ 。

例如时空平移: $x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \Delta x_\mu$

相对性原理: 运动方程或拉氏量在不同的参考系(惯性系)中具有相同的表达式。

变换:

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = \alpha_{\mu\nu}x_\nu$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x') = \alpha_{\mu\nu} A_\nu(x),$$

定义场强:

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} \quad (2.34)$$

一般来说:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} F_{\mu\nu} = 0 \quad (2.35)$$

如果有流:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} F_{\mu\nu} = j_\nu(x) \quad (2.36)$$

同样:

$$F'_{\mu\nu} = \frac{\partial A'_\nu(x')}{\partial x'_\mu} - \frac{\partial A'_\mu(x')}{\partial x'_\nu} \quad (2.37)$$

对于标量场: $x_\mu \rightarrow x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu$, 则有:

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \varphi(x) \quad (2.38)$$

对于自由的场, 则有:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m^2 \right) \varphi(x) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (2.39)$$

对于另一个参考系:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x'_\mu} - m^2 \right) \varphi'(x') = 0$$

相应的

$$\mathcal{L} \left(\varphi(x), \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi(x) \right) = \mathcal{L} \left(\varphi'(x'), \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \varphi'(x') \right)$$

坐标平移的情况:

坐标平移下: $x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \Delta x_\mu$, 则

$$\varphi_\gamma(x) \rightarrow \varphi'_\gamma(x') = \varphi_\gamma(x) \quad \varphi'(x) = \varphi(x - \Delta x_\mu) \quad (2.40)$$

Lorentz 转动: $x_\mu \rightarrow x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu$, 则标量场:

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \varphi(x)$$

$$\varphi'(x) = \varphi(\alpha^{-1}x)$$

$$\varphi(\alpha^{-1}x) = \varphi'((\alpha^{-1}x)') = \varphi'(\alpha(\alpha^{-1}x)) = \varphi'(x)$$

流守恒

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu(x) = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(x) + \frac{\partial j_0(x)}{\partial t} = 0 \quad (2.41)$$

对两边积分则有：

$$\int \nabla \cdot \mathbf{j}(x) d^3x = 0$$

从而推出

$$Q = \int d^3x j_0(x) \quad (2.42)$$

为守恒量。

注：

将 $j_\mu(x) \rightarrow T_{\mu\nu\sigma\rho}(x)$ ，如果

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} T_{\mu\nu\sigma\rho}(x) = 0 \quad (2.43)$$

则可以推出

$$Q = \int d^3x T_{4\nu\sigma\rho}(x) \quad (2.44)$$

为守恒量。

时空平移不变：

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} T_{\mu\nu} = 0 \quad (2.45)$$

其中能量动量张量为：

$$T_{\mu\nu} = \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_\gamma/\partial x_\mu)}$$

对应的守恒量为： $P_\mu = -i \int T_{\mu 4} d^3x$ ， $P = (\mathbf{P}, iH)$ 。

$$T_{44} = \mathcal{L} - \pi_\gamma \dot{\varphi}_\gamma = -\mathcal{H} \quad (2.46)$$

为哈密顿量密度；

$$T_{j4} = -i\pi_\gamma (\nabla_j \varphi_\gamma) = iP_j \quad (2.47)$$

$\mathbf{P} \triangleq -\pi_\gamma (\nabla \varphi_\gamma)$ 为动量密度。

经过量子化后， φ, π 变成量子算符，满足对易关系：

$$[\varphi_\gamma(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{x}', t)] = i\delta_{\gamma s} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.48)$$

基本运动方程：

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_\gamma = i[H, \varphi_\gamma] \\ \dot{\pi}_\gamma = i[H, \pi_\gamma] \end{cases} \quad (2.49)$$

从而推出运动方程：

$$\begin{cases} \dot{A} = i[H, A] \\ \nabla A = -i[\mathbf{P}, A] \end{cases} \quad (2.50)$$

或者：

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} A = -i[P_\mu, A] \quad (2.51)$$

(注意: $x_\mu = (x, ict)$, $c = 1, \hbar = 1$)

例如:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{P}, \varphi_\sigma(x)] &= - \int d^3x' [\pi_\rho(x') \nabla' \varphi_\rho(x'), \varphi_\sigma(x)] \\
 &= - \int d\mathbf{x}' [\pi_\rho(x'), \varphi_\sigma(x)] \nabla' \varphi_\rho(x') \\
 &= i \int d^3x' \delta_{\rho\sigma} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla' \varphi_\rho(x') \\
 &= i \nabla \varphi_\sigma(x)
 \end{aligned}$$

注意:

$$\mathbf{P} = \int d^3x \mathbf{P}$$

从而有

$$\begin{aligned}
 [P_i, P_\mu] &= -i \int d^3x [P_i, T_{\mu 4}(x)] = \int d\mathbf{x} \frac{\partial T_{\mu 4}(x)}{\partial x_i} = 0 \\
 [\mathbf{P}, \pi_\sigma(x)] &= - \int d^3x' \pi_\rho(x') \nabla' [\varphi'_\rho(x'), \pi_\sigma(x)] \\
 &= -i \int d\mathbf{x}' \pi_\rho(x') \delta_{\rho\sigma} \nabla' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
 &= i \nabla \pi_\sigma(x)
 \end{aligned}$$

§2.4.1 Lorentz 变换和角动量守恒律

Lorentz 变换 $x_\mu \rightarrow x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu$, $\varphi_\gamma(x) \rightarrow \varphi'_\gamma(x') = \Lambda_{\gamma s} \varphi_s(x)$, 考虑一个无穷小的 Lorentz 变换,

$$\alpha_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu} \quad (2.52)$$

由 Lorentz 协变可以知道: $x_\mu x_\mu = x'_\nu x'_\nu$ 。

$\alpha_{\mu\nu}$ 满足关系:

$$\alpha_{\mu\lambda} \alpha_{\nu\lambda} = \delta_{\mu\nu}$$

$$\alpha_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu}$$

证明:

$$\begin{aligned}
 x_\mu x_\mu &= x'_\nu x'_\nu = \alpha_{\nu\lambda} x_\lambda \alpha_{\nu\lambda} x_\lambda \\
 &= \sum_{\nu=1}^4 \left(\sum_{\lambda=1}^4 \alpha_{\nu\lambda} x_\lambda \cdot \sum_{\sigma=1}^4 \alpha_{\nu\sigma} x_\sigma \right) \\
 &= \sum_{\lambda=1}^4 \sum_{\nu=1}^4 \alpha_{\nu\lambda}^2 x_\lambda^2 + 2 \sum_{\lambda < \sigma} \sum_{\nu=1}^4 \alpha_{\nu\lambda} \alpha_{\nu\sigma} x_\lambda x_\sigma \\
 &= \sum_{\lambda=1}^4 x_\lambda^2
 \end{aligned}$$

所以 $\alpha_{\nu\lambda} \alpha_{\nu\sigma} = \delta_{\lambda\sigma}$ 成立。

由这个关系可以推出:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\mu\nu} &= (\delta_{\mu\lambda} + \varepsilon_{\mu\lambda})(\delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}) \\
 &= \delta_{\lambda\nu} + \varepsilon_{\lambda\nu} + \varepsilon_{\nu\lambda} + O(\varepsilon^2) \\
 &= \delta_{\lambda\nu} \Rightarrow \varepsilon_{\lambda\nu} = -\varepsilon_{\nu\lambda}
 \end{aligned}$$

即 $\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$ 反对称。

展开:

$$\Lambda_{\gamma s} = \delta_{\gamma s} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S_{\gamma s, \mu\nu} \quad (2.53)$$

相应的场的变换为:

$$\varphi_\gamma(x) \rightarrow \varphi'_\gamma(x') = \varphi_\gamma(x) + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S_{\gamma s, \mu\nu}\varphi_s(x)$$

如果拉氏量满足在 Lorentz 变换下不变则有:

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{L} &= \mathcal{L}[\varphi'_\gamma(x'), \partial\varphi'_\gamma(x')/\partial x'_\mu] - \mathcal{L}[\varphi_\gamma(x), \partial\varphi_\gamma(x)/\partial x_\mu] \\
 &= \mathcal{L}[\varphi'_\gamma(x'), \partial\varphi'_\gamma(x')/\partial x'_\mu] - \mathcal{L}[\varphi'_\gamma(x), \partial\varphi'_\gamma(x)/\partial x_\mu] \\
 &\quad + \mathcal{L}[\varphi'_\gamma(x), \partial\varphi'_\gamma(x)/\partial x_\mu] - \mathcal{L}[\varphi_\gamma(x), \partial\varphi_\gamma(x)/\partial x_\mu] \\
 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu}\Delta x_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\gamma}\delta\varphi_\gamma + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_\gamma/\partial x_\mu)}\delta\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_\mu} = 0
 \end{aligned}$$

另一方面:

$$\begin{aligned}
 \delta\varphi_\gamma &= \varphi'_\gamma(x) - \varphi_\gamma(x) = \varphi'_\gamma((x - \varepsilon x)') - \varphi_\gamma(x) \\
 &= \varphi_\gamma(x - \varepsilon x) + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S_{\gamma s, \mu\nu}\varphi_s(x - \varepsilon x) - \varphi_\gamma(x) \\
 &= -\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_\mu}\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S_{\gamma s, \mu\nu}\varphi_s(x) \\
 \delta(\partial\varphi_\gamma/\partial x_\mu) &= \frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta\varphi_\gamma
 \end{aligned}$$

所以, 最终拉氏量的变分形式为:

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu}\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\gamma}\left[\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_\mu}\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S_{\gamma s, \mu\nu}\varphi_s(x)\right] \\
 &\quad - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_\gamma/\partial x_\rho)}\frac{\partial}{\partial x_\rho}\left(\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_\mu}\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S_{\gamma s, \mu\nu}\varphi_s(x)\right)
 \end{aligned}$$

利用 Euler-Lagrange 方程, 可以得到:

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{L} &= \varepsilon_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\rho}\left[L\delta_{\mu\rho}x_\nu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_\gamma/\partial x_\rho)}\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_\mu}x_\nu - \frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_\gamma/\partial x_\rho)}S_{\gamma s, \mu\nu}\varphi_s(x)\right] \\
 &= \varepsilon_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\rho}\left[x_\nu T_{\mu\rho} + \frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_\gamma/\partial x_\rho)}S_{\gamma s, \mu\nu}\varphi_s(x)\right] \\
 &\equiv \varepsilon_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\rho}m_{\mu\nu, \rho} = 0 \\
 \varepsilon_{\mu\nu} &= -\varepsilon_{\nu\mu}
 \end{aligned}$$

推出守恒流

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho} m_{\mu\nu,\rho} = 0 \quad (2.54)$$

$$m_{\mu\nu,\rho} = x_\nu T_{\mu\rho} - x_\mu T_{\nu\rho} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi_\gamma / \partial x_\rho)} S_{\gamma s, \mu\nu} \varphi_s \quad (2.55)$$

对应的守恒量为： $\int d^3x m_{\mu\nu,4}$ ，从 $m_{\mu\nu,\rho}$ 的定义形式可以看出 $m_{\mu\nu,\rho}$ 的对角元素为零，共有六个独立的分量。

如果： μ, ν 取 (i, j) 则对应空间转动守恒量的形式：

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} &= i \int d^3x m_{\mu\nu,4} \\ &= -i \int d^3x [(x_\mu T_{\nu 4} - x_\nu T_{\mu 4}) - i \pi_\gamma S_{\gamma s, \mu\nu} \varphi_s] \end{aligned}$$

μ, ν 取 (i, j) ，则总角动量为

$$M_{j,k} = -M_{k,j} = i \int m_{jk,4} d^3x \quad (2.56)$$

其中第一部分代表场的轨道角动量

$$\int (-ix_j T_{k4} + ix_k T_{j4}) d^3x = \int (x_j P_k - x_k P_j) d^3x \quad (2.57)$$

第二部分代表场的内禀角动量即自旋， S 只与场在坐标转动下的变换性质有关。

注：

1. 标量场： $S_{\gamma s, \mu\nu} = 0$ ，（ $\varphi'_\gamma(x') = \varphi_\gamma(x)$ 即自旋为零）
2. 矢量场： $S_{\gamma s, \mu\nu} = \delta_{\mu\gamma} \delta_{\nu s} - \delta_{\mu s} \delta_{\nu\gamma}$ ，（ $A'_\gamma(x') = \alpha_{\gamma s} A_s(x)$ ）
3. 旋量场： $S_{\gamma s, \mu\nu} = \frac{1}{4} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)_{\gamma s} = i/4 \sigma_{\mu\nu}$

角动量

$$M_{jk} = -i \int \pi m_{jk} \varphi d^3x = -i \int \pi_r (m_{jk})_{rs} \varphi_s d^3x \quad (2.58)$$

其中 m 为 $n \times n$ 的矩阵， φ, π 为 n 列矩阵。分成两个部分

$$M_{jk} = L_{jk} + S_{jk} \quad (2.59)$$

其中

$$L_{jk} \equiv x_j \left(-i \frac{\partial}{\partial x_k} \right) - x_k \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad (2.60)$$

$$(S_{jk})_{rs} = -i S_{rs, jk} \quad (2.61)$$

对易关系

$$[M_1, M_2] = iM_3, \quad [M_2, M_3] = iM_1, \quad [M_3, M_1] = iM_2 \quad (2.62)$$

其中 $M_1 \equiv M_{23}$, $M_2 \equiv M_{31}$, $M_3 \equiv M_{12}$ 。

这些对易关系可以从基本对易关系

$$[\pi_\gamma(\mathbf{x}, t), \varphi_s(\mathbf{x}', t)] = -i \delta_{\gamma s} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

证明得出。这中间需要注意矩阵之间的对易问题。

总结 1. 时空平移不变性 $\Rightarrow$ 2. 能量动量守恒 (时空的均匀性) 3. 空间转动不变性 $\Rightarrow$ 4. 总角动量守恒 (空间的各向同性)

§2.4.2 相因子整体 (非定域) 变换与 “荷” 守恒

如果拉氏量在如下的变换中有不变性:

$$\varphi_r(x) \rightarrow \varphi_r - i\varepsilon \lambda_{rs} \varphi_s(x) \quad (\varphi(x) \rightarrow e^{-i\varepsilon \lambda} \varphi(x)) \quad (2.63)$$

ε 与 x 无关 (整体性, 非定域), 如果拉氏量不变, 则有

$$\delta\varphi_r = -i\varepsilon \lambda_{rs} \varphi_s = \varphi'_r - \varphi_r$$

拉氏量的变分:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_r} \delta\varphi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x_\mu)} \delta\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_\mu} \\ &= -i\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x_\mu)} \lambda_{rs} \varphi_s \right) = 0 \end{aligned}$$

从而得出一个守恒流:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} J_\mu(x, \lambda) = 0 \quad (2.64)$$

$$J_\mu(x, \lambda) = -i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x_\mu)} \lambda_{rs} \varphi_s \quad (2.65)$$

$$J_4 = \pi_r(x) \lambda_{rs} \varphi_s(x) \quad (2.66)$$

守恒量为 “荷”:

$$Q(t) = -i \int d^3x J_4(x) = -i \int d^3x \pi_r(x) \lambda_{rs} \varphi_s(x) \quad (2.67)$$

1. “电荷” 守恒 ($U(1)$ 变换不变, 也就是说: $\lambda_{rs} = \delta_{rs}$):

$$Q(t) = -i \int d^3x \pi_r \varphi_r \quad (2.68)$$

对于标量场来说, Q 就是电荷。

2. 同位旋守恒 ($SU(2)$ 生成元)

$$r, s = 1, 2, \dots, n, \quad \lambda_{rs}^{a=1,2,3} = (t^{a=1,2,3})_{rs}, \quad [t_i, t_j] = i\varepsilon_{ijk} t_k \quad (2.69)$$

对应的守恒量:

$$\mathbf{T} = -i \int \pi \mathbf{t} \varphi d^3x = -i \int \pi_r(\mathbf{t})_{rs} \varphi_s d^3x \quad (2.70)$$

3. $SU(n)$

$$\lambda_{rs} = (\lambda^a)_{rs}, \quad a = 1, 2, \dots, n^2 - 1, \quad [\lambda^a, \lambda^b] = if^{abc} \lambda^c \quad (2.71)$$

如在 $SU(3)$ 群中, $a = 1, 2, \dots, 8$, 分别有 8 个独立的分量。

第三章 标量场的量子化

§3.1 实标量场的量子化

标量场:

在 Lorentz 转动下不变的场: $x_\mu \rightarrow x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu$, $\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \varphi(x)$ 。

区别标量场和赝标量场:

- (1) 在 Lorentz 变换下没有区别,
- (2) 差别表现在空间反射变换下的性质不同。

空间变换: $\begin{cases} \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = -\mathbf{x} \\ t \rightarrow t' = t \end{cases}$, 在这种变换下,

1. 标量 (scalar) $\varphi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \varphi'(\mathbf{x}', t') = \varphi(\mathbf{x}, t)$
2. 赝标量 (pseudo scalar) $\varphi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \varphi'(\mathbf{x}', t') = -\varphi(\mathbf{x}, t)$

例如 π 介子是一个赝标量介子。

自由的标量场 (包括赝标量) 满足 Klein-Gordon 方程。

$$(\square - m^2) \varphi(x) = 0, \quad (3.1)$$

其中

$$\square = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad (3.2)$$

和这个方程对应的拉氏量为:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \quad (3.3)$$

正则动量: $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}$

正则量子化:

$$\begin{cases} [\varphi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{x}', t)] = [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = 0 \\ [\pi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{x}', t)] = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{cases} \quad (3.4)$$

总的哈密顿量为:

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(\pi, \varphi, \nabla \varphi) \quad (3.5)$$

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L} = 1/2 \left(\pi^2 + (\nabla \varphi)^2 + m^2 \varphi^2 \right) \quad (3.6)$$

动量算符:

$$\mathbf{P} = - \int \pi \nabla \varphi d^3x \quad (3.7)$$

能量动量张量:

$$T_{\mu\nu} = (\partial_\mu \varphi) (\partial_\nu \varphi) - \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu \varphi)^2 + m^2 \varphi^2 \right] \delta_{\mu\nu} \quad (3.8)$$

角动量:

$$m_{\mu\nu,\rho} = x_\nu T_{\mu\rho} - x_\mu T_{\nu\rho} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi_r / \partial x_\rho)} S_{rs,\mu\nu} \varphi_s$$

$$= x_\nu T_{\mu\rho} - x_\mu T_{\nu\rho} \quad (3.9)$$

因为在 Lorentz 转动下, 相应的场的变换为

$$\varphi_r(x) \rightarrow \varphi'_r(x') = \varphi_r(x) + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu} S_{rs,\mu\nu} \varphi_s(x) \quad (3.10)$$

而标量场 $\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \varphi(x)$, 所以自旋: $S_{rs,\mu\nu} = 0$ (自旋为零)

解运动方程可以得到:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \frac{1}{(2\omega)^{1/2}} (a(\mathbf{k}) e^{ikx} + a^*(\mathbf{k}) e^{-ikx}) \quad (3.11)$$

其中 $kx = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + k_4 x_4 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$

实标量: $\varphi(x) = \varphi^*(x)$

由于讨论实标量场, 所以存在关系式: $\varphi^\dagger(x) = \varphi(x)$, $\alpha^* \rightarrow \alpha^\dagger$, 通解的形式为:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [\alpha(\mathbf{k}) e^{ikx} + \alpha^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ikx}] \quad (3.12)$$

$$\pi(x) = \dot{\varphi}(x) = \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \sqrt{\frac{\omega}{2}} (\alpha(\mathbf{k}) e^{ikx} - \alpha^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ikx}) \quad (3.13)$$

由 (3.12) $\cdot \omega \pm$ (3.13) $\cdot i$ 则可以得到

$$\omega\varphi(x) + i\pi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{2\omega} \int d\mathbf{k} \alpha(\mathbf{k}) e^{ikx} \quad (3.14)$$

$$\omega\varphi(x) - i\pi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{2\omega} \int d\mathbf{k} \alpha^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ikx} \quad (3.15)$$

利用 δ 函数的定义

$$\delta(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

在 (3.14) 式的两边乘以 e^{-ikx} 并对 x 积分, 则可以得到

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{x} e^{-ikx} \omega\varphi(x) + i\pi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{2\omega} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{k}' \alpha(\mathbf{k}') e^{ik'x} e^{-ikx} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{2\omega} \int d\mathbf{k}' \alpha(\mathbf{k}') \int d\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \\ &= (2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega} \alpha(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

从而可以推出:

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} (2\omega)^{1/2}} \int d\mathbf{x} e^{-ikx} (\omega\varphi(x) + i\pi(x)) \\ \alpha^\dagger(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} (2\omega)^{1/2}} \int d\mathbf{x} e^{ikx} (\omega\varphi(x) - i\pi(x)) \end{aligned} \quad (3.17)$$

相应的对易关系为:

$$[\alpha(\mathbf{k}), \alpha(\mathbf{k}')] = 0, \quad [\alpha^\dagger(\mathbf{k}), \alpha^\dagger(\mathbf{k}')] = 0,$$

$$[\alpha(\mathbf{k}), \alpha^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

四维动量的表达式为:

$$P_\mu = \int d^3x \frac{1}{2} k_\mu [\alpha^\dagger(\mathbf{k}) \alpha(\mathbf{k}) + \alpha(\mathbf{k}) \alpha^\dagger(\mathbf{k})] \quad (3.18)$$

取小体积元则有:

$$\begin{aligned} P_\mu &= \lim_{\Delta\tau_k \rightarrow 0} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} k_\mu \left[\sqrt{\Delta\tau_k} \alpha^\dagger(\mathbf{k}) \sqrt{\Delta\tau_k} \alpha(\mathbf{k}) + \sqrt{\Delta\tau_k} \alpha(\mathbf{k}) \sqrt{\Delta\tau_k} \alpha^\dagger(\mathbf{k}) \right] \\ &= \lim_{\Delta\tau_k \rightarrow 0} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} k_\mu \left[\alpha_{\mathbf{k}}^\dagger \alpha_{\mathbf{k}} + \alpha_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}}^\dagger \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

其中: $\alpha_{\mathbf{k}} = \sqrt{\Delta\tau_{\mathbf{k}}} \alpha(\mathbf{k}), \alpha_{\mathbf{k}}^\dagger = \sqrt{\Delta\tau_{\mathbf{k}}} \alpha^\dagger(\mathbf{k})$ 。

利用关系式

$$\lim_{\Delta\tau_{\mathbf{k} \rightarrow 0} \Delta\tau_{\mathbf{k}'}} \frac{\delta \mathbf{k} \delta \mathbf{k}'}{\sqrt{\Delta\tau_{\mathbf{k}} \Delta\tau_{\mathbf{k}'}}} = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (3.20)$$

可以推出对易关系:

$$[\alpha_{\mathbf{k}}, \alpha_{\mathbf{k}'}] = [\alpha_{\mathbf{k}}^\dagger, \alpha_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0, [\alpha_{\mathbf{k}}, \alpha_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k} \mathbf{k}'} \quad (3.21)$$

所以最终四维动量的表示形式为:

$$P_\mu = \sum_{\mathbf{k}} \frac{k_\mu}{2} [\alpha_{\mathbf{k}}^\dagger \alpha_{\mathbf{k}} + \alpha_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}}^\dagger] = \sum_{\mathbf{k}} k_\mu \left[\alpha_{\mathbf{k}}^\dagger \alpha_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right] \quad (3.22)$$

和谐振子的形式很象。

哈密顿量为:

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left(\alpha_{\mathbf{k}}^\dagger \alpha_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left(N_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.23)$$

注意: $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{k^2 + m^2}$

粒子数算符: $N_{\mathbf{k}} = \alpha_{\mathbf{k}}^\dagger \alpha_{\mathbf{k}}$

从而有: $N_{\mathbf{k}} |n_{\mathbf{k}}\rangle = n_{\mathbf{k}} |n_{\mathbf{k}}\rangle, N_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} |n_{\mathbf{k}}\rangle = (n_{\mathbf{k}} - 1) \alpha_{\mathbf{k}} |n_{\mathbf{k}}\rangle, N_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}}^\dagger |n_{\mathbf{k}}\rangle = (n_{\mathbf{k}} + 1) \alpha_{\mathbf{k}}^\dagger |n_{\mathbf{k}}\rangle$

最后, 我们就有了:

1. $\alpha_{\mathbf{k}}$: 消灭算符 (消灭一个 4 动量为 $k_\mu = (\mathbf{k}, i\omega)$ 的标量粒子)
2. $\alpha_{\mathbf{k}}^\dagger$: 产生算符 (产生一个标量粒子)
3. $N_{\mathbf{k}} = \alpha_{\mathbf{k}}^\dagger \alpha_{\mathbf{k}}$: 粒子数算符
4. $|0\rangle$: 不含该标量粒子的态即真空态, $\alpha_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0$
5. $|n_{\mathbf{k}}\rangle$: 粒子数为 $n_{\mathbf{k}}$ 的态,

$$|n_{\mathbf{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\mathbf{k}}!}} \left(\alpha_{\mathbf{k}}^\dagger \right)^{n_{\mathbf{k}}} |0\rangle \quad (3.24)$$

6. 对于多粒子体系, 则有

$$|n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\mathbf{k}_1}! n_{\mathbf{k}_2}! \dots}} \left(\alpha_{\mathbf{k}_1}^\dagger \right)^{n_{\mathbf{k}_1}} \left(\alpha_{\mathbf{k}_2}^\dagger \right)^{n_{\mathbf{k}_2}} \dots |0\rangle \quad (3.25)$$

粒子数算符满足的对易关系为: $[\alpha, \alpha^\dagger] = 1$

1. 服从玻色统计 (交换对称性)

$$|k_1, \dots, k_i, \dots, k_j, \dots\rangle = |k_1, \dots, k_j, \dots, k_i, \dots\rangle \quad (3.26)$$

2. 同一粒子态上可以存在任意数目的粒子

§3.1.1 对易关系的相对论不变形式（实标量场）

由产生消灭算符的对易关系可得场算子的对易关系

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi(x')] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \frac{d^3k d^3k'}{\sqrt{2\omega} \cdot 2\omega'} \left\{ [\alpha(\mathbf{k}), \alpha^\dagger(\mathbf{k}')] e^{ikx - ik'x'} + [\alpha^\dagger(\mathbf{k}), \alpha(\mathbf{k}')] e^{-ikx + ik'x'} \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{2\omega} \left(e^{ik(x-x')} - e^{-ik(x-x')} \right) \equiv i\Delta(x-x') \end{aligned} \quad (3.27)$$

注意到:

$$\int d^3k \frac{1}{2\omega} = \int d^4k \delta(k^2 + m^2) \theta(k_0) \quad (3.28)$$

其中

$$\delta(k^2 + m^2) = \delta(\mathbf{k}^2 - k_0^2 + m^2) = \frac{1}{2\omega} [\delta(k_0 - \omega) + \delta(k_0 + \omega)] \quad (3.29)$$

$$\theta(k_0) = \begin{cases} 1, & k_0 > 0 \\ 0, & k_0 < 0 \end{cases}, \quad \varepsilon(k_0) = \theta(k_0) - \theta(-k_0) = \begin{cases} 1, & k_0 > 0 \\ -1, & k_0 < 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

$\theta(x)$ 为符号函数。所以

$$\Delta(x-x') = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 + m^2) \varepsilon(k_0) e^{ik(x-x')} \quad (3.31)$$

$\varepsilon(k_0)$ 是 Lorentz 不变的（类时间隔 $x_0^2 > x^2$ ），整个表达式在类空间隔区为零。

类时间隔： $x^2 = x^2 - t^2 < 0$ ，类空间隔： $x^2 = x^2 - t^2 > 0$ ，对于类空间隔 x 和 x' 两点发生的事件没有因果关系。（Principle of Micro-causality）

可以证明:

$$\Delta(x, t) = \Delta(-x, t) \quad \Delta(x, t) = -\Delta(-x, -t) \quad \{\Delta(x) = -\Delta(-x)\} \quad (3.32)$$

$$\left. \frac{\partial \Delta(x)}{\partial t} \right|_{t=0} = -\delta^{(3)}(x), \quad \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta(x, t) \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta(x, t) \right|_{x_i=0} = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.33)$$

$$(\square - m^2) \Delta(x) = 0, \quad [\varphi(x), \varphi(x')] \sim \Delta(x-x'), \quad \Delta(x, 0) = 0 \quad (3.34)$$

§3.2 复标量场的量子化

复标量场可以看作由两个实标量场 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 组成:

$$\begin{cases} \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)] \\ \varphi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_1(x) - i\varphi_2(x)] \end{cases} \quad (3.35)$$

同时对于单个的标量场来说，满足自由粒子的 Klein-Gordon 方程，如下式所示:

$$(\square - m^2) \varphi_i(x) = 0 \quad i = 1, 2 \quad (3.36)$$

拉氏量为:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_i) (\partial_\mu \varphi_i) - \frac{1}{2} m^2 \varphi_i \varphi_i \quad (3.37)$$

对应到实标量场的情形则有： $\pi_i = \dot{\varphi}_i$ ，相应的对易关系为：

$$\begin{cases} [\varphi_i(\mathbf{k}, t), \varphi_j(\mathbf{k}', t)] = [\pi_i(\mathbf{k}, t), \pi_j(\mathbf{k}', t)] = 0 \\ [\pi_i(\mathbf{k}, t), \varphi_j(\mathbf{k}', t)] = -i\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{cases} \quad (3.38)$$

哈密顿量为：

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi_i^2 + (\nabla\varphi_i)(\nabla\varphi_i) + m^2\varphi_i\varphi_i \right] \quad (3.39)$$

量子化后则有：

$$\int d^3k \omega(\mathbf{k}) \left[\alpha_i^\dagger(\mathbf{k})\alpha_i(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right] = H$$

引入粒子数算符：

$$N_i(\mathbf{k}) = \alpha_i^\dagger(\mathbf{k})\alpha_i(\mathbf{k}) \quad (3.40)$$

对易关系：

$$[\alpha_i^\dagger(\mathbf{k}), \alpha_j(\mathbf{k}')] = \delta_{ij}\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), [\alpha_i(\mathbf{k}), \alpha_j(\mathbf{k}')] = [\alpha_i^\dagger(\mathbf{k}), \alpha_j^\dagger(\mathbf{k}')] = 0 \quad (3.41)$$

对于复标量场则有：

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2), \quad \varphi^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2) \quad (3.42)$$

考虑变换： $\varphi(x) \rightarrow e^{i\varepsilon\lambda}\varphi(x)$ ， $\varphi^\dagger(x) \rightarrow e^{-i\varepsilon\lambda}\varphi^\dagger(x)$ ，如果复标量场对这种变换具有不变性，则有守恒量

$$Q = -i \int d^3x \pi_r \lambda_{rs} \varphi_s = -i \int d^3x \lambda [\pi\varphi - \pi^*\varphi^*] \quad (3.43)$$

即“荷”守恒。

荷：电荷（电场），重子荷数，奇异数（对于中性粒子）。系统的拉格朗日量可以写为：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_i)(\partial_\mu\varphi_i) - \frac{1}{2}m^2\varphi_i\varphi_i \\ &= -(\partial_\mu\varphi^*)(\partial_\mu\varphi) - m^2\varphi^*\varphi \end{aligned} \quad (3.44)$$

从而得到

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{\varphi}_1 - i\dot{\varphi}_2) \\ \pi^* &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}^*} = \dot{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{\varphi}_1 + i\dot{\varphi}_2) \end{aligned} \quad (3.45)$$

哈密顿量：

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \frac{1}{2} [\pi_i\pi_i + (\nabla\varphi_i)(\nabla\varphi_i) + m^2\varphi_i\varphi_i] \\ &= \int d^3x [\pi^*\pi + (\nabla\varphi^*)(\nabla\varphi) + m^2\varphi^*\varphi] \end{aligned} \quad (3.46)$$

量子化后：

$$[\varphi(\mathbf{k}, t), \varphi(\mathbf{k}', t)] = [\varphi(\mathbf{k}, t), \varphi^\dagger(\mathbf{k}', t)] = [\pi(\mathbf{k}, t), \pi(\mathbf{k}', t)] = [\pi(\mathbf{k}, t), \pi^\dagger(\mathbf{k}', t)] = 0$$

$$[\pi(\mathbf{k}, t), \varphi(\mathbf{k}', t)] = [\pi^\dagger(\mathbf{k}, t), \pi^\dagger(\mathbf{k}', t)] = -i\delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{x}) \quad (3.47)$$

动量空间:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [a(\mathbf{k})e^{ikx} + b^\dagger(\mathbf{k})e^{-ikx}] \\ \varphi^\dagger(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [a^\dagger(\mathbf{k})e^{-ikx} + b(\mathbf{k})e^{ikx}] \end{aligned} \quad (3.48)$$

从而推出对易关系:

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = [b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{x}') \quad (3.49)$$

$$[a(\mathbf{k}), b(\mathbf{k}')] = [a^\dagger(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')] = [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = [a(\mathbf{k}), b(\mathbf{k}')] = [a^\dagger, a^\dagger] = [b^\dagger, b^\dagger] = 0$$

四维动量为:

$$P_\mu = \int d^3k k_\mu [a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}) + 1] = \int d^3k k_\mu \left[a_i^\dagger(\mathbf{k})a_i(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right] \quad (3.50)$$

守恒流 j_μ : $\partial_\mu j_\mu = 0$

对应的守恒量为:

$$Q = i \int d^3x [\varphi^\dagger \dot{\varphi} - \varphi \dot{\varphi}^\dagger] = \int d^3k [a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) - b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})] = \int d^3k [N_{\mathbf{k}}^+ - N_{\mathbf{k}}^-] \quad (3.51)$$

其中 $a, a^\dagger$ 分别代表正粒子的消灭和产生算符, $b, b^\dagger$ 分别代表反粒子的消灭和产生算符。这就解决了 Klein-Gordon 方程存在的负几率的问题。 Klein-Gordon 方程描述的是一个有正反粒子组成的带有某种“荷”的标量场。

第四章 矢量场和电磁场的量子化

§4.1 基本矢量场的正则量子化

基本的电磁场 ($m \neq 0$) : Massive vector field

规范场: 电磁场 $A_\mu, W^\pm, Z^0$, 后两者通过自发破缺获得质量。相应的 Lorentz 变换为: $A'_\mu(x') = \alpha_{\mu\nu} A_\nu(x)$ 。

上面两者都是自旋为 1 的矢量场, 通常用 A_μ 表示。

$$\left\{ \begin{array}{ll} Quark, Lepton & \text{Fermion 场} \\ G_\mu, W_\mu^\pm, A_\mu, Z^0 & \text{规范场} \\ \phi & \text{Higgs 场} \end{array} \right.$$

场方程为:

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = m^2 A_\nu \quad (4.1)$$

其中

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

※对比自由的电磁场:

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0, \quad F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.2)$$

将场方程展开就可以得到:

$$\square A_\nu - \partial_\nu (\partial_\mu A_\mu) = m^2 A_\nu$$

其中 $\square = \partial_\mu \partial_\mu = \nabla^2 - \partial_t \partial_t$ 。

对上式两边微商, 则可以得到:

$$\square \partial_\nu A_\nu - \partial_\nu \partial_\nu (\partial_\mu A_\mu) = m^2 \partial_\nu A_\nu$$

由于 $m \neq 0$, 所以 $\partial_\nu A_\nu = 0$ 。

所以 $\partial_\nu A_\nu = 0$ 是场方程的一部分, 从中可以看出独立的自由度自由 3 个。

故场方程可以等价:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\square - m^2) A_\mu = 0 \\ \partial_\mu A_\mu = 0 \end{array} \right. \quad (4.3)$$

所以, 相应的拉氏量为:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 A_\mu^2 \quad (4.4)$$

其中 $F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = 2\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu - 2\partial_\mu A_\nu \partial_\nu A_\mu$ 。由于 $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}, A_0^\dagger = A_0$, 所以, $A_4^\dagger = -A_4 (A_4 = iA_0)$ 。

量子化, $\mathcal{L}$ 中不含有 $\dot{A}_4 (F_{44} = 0, \text{代表 } \dot{A}_4)$, A_4 不是独立变量, 所以必须把 A_4 消掉。即表示为 $\mathbf{A}, \pi$ 的函数。

由 $\partial_\mu F_{\mu\nu} = m^2 A_\nu$, 取 $\nu = 4$, 则

$$A_4 = \frac{1}{m^2} (\nabla_j F_{j4}) = \frac{i}{m^2} \nabla \cdot \pi$$

$\mathbf{A}$ 是独立变量,

$$\pi_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_j} = \dot{A}_j - i \nabla_j A_4$$

所以

$$\boldsymbol{\pi} = \dot{\mathbf{A}} + \frac{1}{m^2} \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}) \rightarrow \dot{\mathbf{A}} = \dot{\boldsymbol{\pi}} - \frac{1}{m^2} \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}) \quad (4.5)$$

有:

$$\dot{\mathbf{A}} \cdot \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}^2 - \frac{1}{m^2} \boldsymbol{\pi} \cdot \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi})$$

对空间积分 (分部积分), 则有

$$\int \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\pi} d^3x = \int \left[\boldsymbol{\pi}^2 + \frac{1}{m^2} (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi})^2 \right] d^3x$$

所以, Hamiltonian 为:

$$\begin{aligned} H &= \int (\boldsymbol{\pi} \cdot \dot{\mathbf{A}} - \mathcal{L}) d^3x \\ &= \frac{1}{2} \int \left[\boldsymbol{\pi}^2 + \left(\frac{\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}}{m} \right)^2 + (\nabla \times \mathbf{A})^2 + m^2 \mathbf{A}^2 \right] d^3x \end{aligned} \quad (4.6)$$

量子化

$$[A_i(\mathbf{x}, t), \pi_j(\mathbf{x}', t)] = i \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (4.7)$$

其他的 $[A_i, A_j], [\pi_i, \pi_j]$ 均等于零。

动量表象: 场方程为

$$\begin{cases} (\square - m^2) A_\mu = 0 \\ \partial_\mu A_\mu = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

平面波解为:

$$A_\mu(\mathbf{k}, x) = e_\mu(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (4.9)$$

其中 $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$, $e_\mu(\mathbf{k})$ 为极化矢量。将这个结果代入场方程的第二个方程, 则可以得到:

$$e_\mu(\mathbf{k}) k_\mu = 0 \quad (4.10)$$

总结上面两个结论, 就可以得到下面的结论:

$$\begin{cases} A_\mu(\mathbf{k}, x) = e_\mu(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \\ e_\mu(\mathbf{k}) k_\mu = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

从 (4.10) 式可以知道当 $\mathbf{k}$ 确定以后, 就只存在三个独立的极化矢量 $e_\mu^{\lambda=1,2,3}(\mathbf{k})$ 。也就是说:

$$e_\mu^\lambda(\mathbf{k}) = \begin{cases} \epsilon^\lambda + \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \epsilon^\lambda)}{m(\omega + m)} & \mu = 1, 2, 3 \\ i \frac{\mathbf{k} \cdot \epsilon^\lambda}{m} & \mu = 4 \end{cases} \quad (4.12)$$

均满足 $k_\mu e_\mu^\lambda(\mathbf{k}) = 0$, 其中 $\epsilon^{\lambda=1,2,3}$ 是三个正交的三维单位矢量。

正交归一性:

$$\begin{cases} e_\mu^\lambda(\mathbf{k})e_\mu^{\lambda'}(\mathbf{k}) = \delta_{\lambda\lambda'} \\ k_\mu e_\mu^\lambda(\mathbf{k}) = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

完备行为:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^2 e_i^\lambda(\mathbf{k})e_j^\lambda(\mathbf{k}) + \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} &= \delta_{ij} \\ \sum_{\lambda=1}^3 e_\mu^\lambda e_\nu^\lambda(\mathbf{k}) &= \delta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \end{aligned}$$

一般取单位矢量第三分量与 $\mathbf{k}$ 同向, 其他 $\epsilon^1 \cdot \mathbf{k} = \epsilon^2 \cdot \mathbf{k} = 0$ 。则极化矢量的形式为:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^1(\mathbf{k}) &= (\epsilon^1, 0) \\ \mathbf{e}^2(\mathbf{k}) &= (\epsilon^2, 0) \\ \mathbf{e}^3(\mathbf{k}) &= \left(\frac{\omega}{m} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, i \frac{|\mathbf{k}|}{m} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

将解的形式量子化, 有:

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e_\mu^\lambda(\mathbf{k}) \left(a_\lambda(\mathbf{k}) e^{ikx} + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ikx} \right) \quad (4.15)$$

取前面的坐标系, 则可以得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left\{ \sum_{\lambda=1,2} \mathbf{e}^\lambda(\mathbf{k}) \left[a_\lambda(\mathbf{k}) e^{ikx} + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ikx} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega}{m} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \left[a_3(\mathbf{k}) e^{ikx} + a_3^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ikx} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

由

$$\boldsymbol{\pi} = \dot{\mathbf{A}} + \frac{1}{m^2} \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}) \quad (4.17)$$

可得:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}(x) &= \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left\{ \sum_{\lambda=1,2} \mathbf{e}^\lambda(\mathbf{k}) \left[a_\lambda(\mathbf{k}) e^{ikx} - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ikx} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{m}{\omega} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \left[a_3(\mathbf{k}) e^{ikx} - a_3^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ikx} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

矢量场可以分为横场和纵场:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_T + \boldsymbol{\pi}_L \\ \boldsymbol{\pi}_T = \dot{\mathbf{A}}_T & (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_T = 0) \\ \boldsymbol{\pi}_L = \dot{\mathbf{A}}_L + 1/m^2 \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_L) \end{cases} \quad (4.19)$$

从 (4.16) 和 (4.18) 式可以反解出湮灭算符:

$$\begin{aligned}
a_{\lambda=1,2}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-ikx} \left[\sqrt{\frac{\omega}{2}} \mathbf{e}^\lambda(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{A}(x) + \frac{i}{\sqrt{2\omega}} \mathbf{e}^\lambda(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\pi}(x) \right] \\
a_{\lambda=3}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(1\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-ikx} \left[\frac{\omega}{2} \frac{m}{\omega} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \cdot \mathbf{A}(x) + \frac{i}{\sqrt{2\omega}} \frac{\omega}{m} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \cdot \boldsymbol{\pi}(x) \right]
\end{aligned} \quad (4.20)$$

对于 $\lambda = 1, 2, 3$ 都有 $[a_\lambda(\mathbf{k}), a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ 。

所以, 哈密顿量为:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\boldsymbol{\pi}^2 + \left(\frac{\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}}{m} \right)^2 + (\nabla \times \mathbf{A})^2 + m^2 \mathbf{A}^2 \right] \Rightarrow \sum_{\lambda=1}^3 \omega(\mathbf{k}) a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) \quad (4.21)$$

※ 【场的自旋算符】

$$S_{jk} = - \int d^3x (\pi_j A_k - \pi_k A_j) = -i \int d^3x \pi_r \left[\hat{S}_{jk} \right]_{rs} \varphi_x \quad (4.22)$$

其中 $[\hat{S}_{jk}]_{rs} \equiv -i S_{rs,jk}$, 和 $S_{rs,\mu\nu} = \delta_{r\mu} \delta_{s\nu} - \delta_{r\nu} \delta_{s\mu}$ 。

并且

$$\begin{aligned}
\hat{S}_3 &\equiv \hat{S}_{12} & \hat{S}_2 &\equiv \hat{S}_{31} & \hat{S}_1 &\equiv \hat{S}_{23} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & & = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} & & = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

也就是说 $[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\epsilon_{ijk} \hat{S}_k$ 。

$$\begin{aligned}
S_z &\equiv \mathbf{S} \cdot \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \frac{i}{2} \sum_{\lambda, \lambda'=1,2} \left[\mathbf{e}^\lambda(\mathbf{k}) \times \mathbf{e}^{\lambda'}(\mathbf{k}) \right] \left[a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}) \right] \\
&= i \left[\epsilon_1^1(\mathbf{k}) \epsilon_2^2(\mathbf{k}) - \epsilon_2^1(\mathbf{k}) \epsilon_1^2(\mathbf{k}) \right] \left[a_{+1}^\dagger(\mathbf{k}) a_{+1}(\mathbf{k}) - a_{-1}^\dagger(\mathbf{k}) a_{-1}(\mathbf{k}) \right] \\
&= i \left[a_2^\dagger(\mathbf{k}) a_1(\mathbf{k}) - a_1^\dagger(\mathbf{k}) a_2(\mathbf{k}) \right] \\
&= a_{+1}^\dagger(\mathbf{k}) a_{+1}(\mathbf{k}) - a_{-1}^\dagger(\mathbf{k}) a_{-1}(\mathbf{k})
\end{aligned} \quad (4.23)$$

其中 $a_{+1}(veck) = 1/\sqrt{2} [a_1(\mathbf{k}) - ia_2(\mathbf{k})]$, $a_{-1}(\mathbf{k}) = 1/\sqrt{2} [a_1(\mathbf{k}) + ia_2(\mathbf{k})]$ 。

a_{+1} 是自旋第三分量为 + 1 的消灭算符, a_{-1} 是自旋第三分量为 - 1 的消灭算符, a_3 是自旋第三分量为 0 的消灭算符。

【思考】

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda=1,2} e_i^\lambda(\mathbf{k}) e_j^\lambda(\mathbf{k}) + \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} &= \delta_{ij} \\
\sum_{\lambda=1,2,3} e_\mu^\lambda(\mathbf{k}) e_\nu^\lambda(\mathbf{k}) &= \delta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}
\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{a} = \sum_\lambda (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^\lambda) \boldsymbol{\epsilon}^\lambda$, $a_i = \sum_\lambda a_j \epsilon_j^\lambda \epsilon_i^\lambda$, $\sum_\lambda \epsilon_j^\lambda \epsilon_i^\lambda = \delta_{ij}$ 。

§4.2 电磁场 (U(1) 规范场) 的量子化

反对称张量: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 。

场方程为:

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad (4.24)$$

进一步展开, 则有:

$$[\square A_\nu - \partial_\nu (\partial_\mu A_\mu)] = 0$$

规范不变性有: (在如下的规范变换下, 场方程具有不变性)

$$A_\mu(x) \leftarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \phi(x) \quad \text{【在同一个参考系中】}$$

相应的反对称张量的变换为:

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu A'_\nu(x) - \partial_\nu A'_\mu(x) \\ &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\mu \partial_\nu \phi(x) - A_\nu \partial_\mu \phi(x) + \partial_\nu \partial_\mu \phi(x) \\ &= F_{\mu\nu} \end{aligned}$$

所以在规范变换下, 场强 $F_{\mu\nu}$ 并不改变。

从而有场方程的不变性。

$$\partial_\mu F'_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu F_{\mu\nu} \quad (4.25)$$

选择一定的规范条件 (附加条件), 从而使它具有不变性。

§4.2.1 常用的两种规范条件

1. Lorentz 协变规范: (Covariant Gauge):

规范条件: $\partial_\mu A_\mu = 0$, 所以场方程为

$$\begin{cases} \square A_\mu = 0 \\ \partial_\mu A_\mu = 0 \end{cases} \quad \text{规范条件的选择} \quad (4.26)$$

如果 A_ν 不满足 $\partial_\mu A_\mu = 0$, 则取 $\square \phi = \partial_\nu A_\nu$, 并令 $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \phi$, 从而可以得到 $\partial_\nu A'_\nu = \partial_\nu A_\nu - \square \phi = 0$ 。

同样, 如果 $\partial_\mu A_\mu = 0$ 也可以 $\Rightarrow \partial_\mu A'_\mu = 0$, 其中 $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda$ 和 $\square \Lambda = 0$ 。

2. 库仑规范 (Coulomb Gauge):

规范条件: $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 。

场方程可以表示为:

$$\begin{cases} \square \mathbf{A} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A} + \dot{A}_0) = 0 \\ \square A_0 + \partial / \partial t (\nabla \cdot \mathbf{A} + \dot{A}_0) = 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

加上规范条件, 则有:

$$\begin{cases} \square \mathbf{A} - \nabla \dot{A}_0 = 0 \\ \nabla^2 A_0 = 0 \end{cases} \quad \text{对于自由场 } A_0 = 0 \rightarrow \begin{cases} \square \mathbf{A} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

任何一个矢量场都可以表示成:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^T + \mathbf{V}^L = (\delta_{ij} - \partial_i \partial_j / \nabla^2) V_j + \partial_i \partial_j / \nabla^2 V_j \quad (4.29)$$

其中

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V}^T = 0 & \text{横场} \\ \nabla \times \mathbf{V}^L = 0 & \text{纵场} \end{cases} \quad (4.30)$$

所以, 通过 Coulomb Gauge, 使得 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ 。

如果 $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0$, 则取 $\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \mathbf{A}$, 令 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \phi$ (变换方式), 则有 $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$, 库仑变换的缺点是没有明显的 Lorentz 协变性, 但是明显表示了电磁场是一个横场。同时, 由 (4.28) 式可以知道, $\mathbf{e}^\lambda \cdot \mathbf{k} = 0$ 。

§4.3 Coulomb Gauge 下光子场的量子化

光子场的拉氏量可以写成:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \quad (4.31)$$

其中定义 $\begin{cases} \mathbf{E} \equiv -\nabla A_0 - \dot{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A} \end{cases}$ 。 $\mathcal{L}$ 中不含有 A_0 , 所以 A_0 不独立。

并且有

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{A}}} = -\mathbf{E} \quad (4.32)$$

注意, 在现在讨论的范围中, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 和 $A_0 = 0$ (自由场的情况)。

如果引入对易关系,

$$[A_i(\mathbf{x}, t), \pi_j(\mathbf{x}', t)] = i\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (4.33)$$

则有

$$[\partial_i A_i(\mathbf{x}, t), \pi_j(\mathbf{x}', t)] = i\partial_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \neq 0$$

这与 Coulomb Gauge 条件相矛盾, 所以必须更改对易关系。

修改后的对易关系为:

$$[A_i(\mathbf{x}, t), \pi_j(\mathbf{x}', t)] = i\left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2}\right)\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (4.34)$$

这样就与 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 和 $\nabla \cdot \pi = 0$ 一致。其他的对易如 $[A_i, A_j] = [\pi_i, \pi_j] = 0$ 。

动量表象:

由场方程 $\begin{cases} \square \mathbf{A}(x) = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{A}(x) = 0 \end{cases}$, 可以解出

$$\mathbf{A}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \sum_{\lambda=1,2} \left\{ \mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k}) \left[a_\lambda(\mathbf{k}) e^{ikx} + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ikx} \right] \right\} \quad (4.35)$$

其中 $k_0 = \omega = |\mathbf{k}|$, 并且有 $\mathbf{e}^\lambda(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0$ 。由此得到正则动量:

$$\pi = \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \sqrt{\frac{\omega}{2}} \sum_{\lambda=1,2} \mathbf{e}^\lambda(\mathbf{k}) \left[a_\lambda(\mathbf{k}) e^{ikx} - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ikx} \right] \quad (4.36)$$

从中反解出 $a_\lambda(\mathbf{k}), a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})$,

$$a_\lambda(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-ikx} \left[\sqrt{\frac{\omega}{2}} \mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{A}(x) + \frac{i}{\sqrt{2\omega}} \mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k}) \cdot \pi(x) \right] \quad (4.37)$$

$$\left[a_{\lambda}(\mathbf{k}), a_{\lambda'}^{\dagger}(\mathbf{k}') \right]$$

[illegible]

$$\left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2}\right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \left(\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{p^2}\right) e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}.$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0$$

最后，哈密顿量的形式为：

$$\mathbf{P} = \int d^3k \sum_{\lambda=1,2} \mathbf{k} a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{\lambda}(\mathbf{k}) \quad (4.40)$$

$\lambda = 1, 2$ 的不同之处在于对自旋的贡献不一样。他们与有质量的矢量场的自旋矩阵是完全相同的。

一般场的对易关系为

利用

$$\sum_{\lambda=1,2} e_i^\lambda(\mathbf{k}) e_j^\lambda(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2}$$

※光子场只有两个极化方向。

则有对易关系:

$$[A_i(x), A_j(x')] = i \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} \right) D(x - x') \quad (4.42)$$

其中 $D(x) = \Delta(x)|_{m=0}$, 具体的形式为:

$$D(x) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} [\delta(t + |\mathbf{x}|) - \delta(t - |\mathbf{x}|)] \quad (4.43)$$

这是一个显式的 Lorentz 协变。

§4.4 Lorentz Gauge 下的电磁场的量子化

缺点：是引入了非物理的自由度，必须消去。

Lorentz Gauge 下场方程为

$$\begin{cases} \square A_\mu = 0 \\ \partial_\mu A_\mu = 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

$A_\mu (\mu = 1, 2, 3, 4)$ 作为独立的场算符, 规范条件作为物理态矢满足的条件 $\langle a | \partial_\mu A_\mu | a \rangle = 0$ 。从而达到保持显式的 Lorentz Covariance。

拉氏量的形式为:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

由于 $F_{44} = 0$, 所以 $\dot{A}_4 = 0$, 从而 A_4 不独立, 故必须修改拉氏量。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu) (\partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\mu)^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu (A_\nu \partial_\nu A_\mu) - \frac{1}{2} \partial_\nu (A_\nu \partial_\mu A_\mu) \end{aligned}$$

略去后面的散度项, 则:

$$\mathcal{L} \Rightarrow -\frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu) (\partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\mu)^2$$

$$\text{引入规范条件} \Rightarrow -\frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu) (\partial_\nu A_\mu)$$

相应的能量动量张量为:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \{ (\partial_\mu A_\lambda) (\partial_\nu A_\lambda) + (\partial_\nu A_\lambda) (\partial_\mu A_\lambda) - \delta_{\mu\nu} (\partial_\rho A_\lambda) (\partial_\rho A_\lambda) \}$$

场的四度动量为:

$$\begin{aligned} P_\mu &= -i \int T_{\mu 4} d^3 x \\ &= \int d^3 x \frac{1}{2} \left\{ i \delta_{\mu 4} (\partial_\rho A_\lambda) (\partial_\rho A_\lambda) - (\partial_\mu A_\lambda) \dot{A}_\lambda - \dot{A}_\lambda (\partial_\mu A_\lambda) \right\} \end{aligned}$$

$$(\mathbf{p} = \int d^3 x \mathbf{E} \times \mathbf{B}, H = \int d^3 x (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2))$$

接下来量子化:

$$\pi_\mu = \frac{\mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = \dot{A}_\mu \quad (\mu = 1, 2, 3, 4) \text{ 这时 } A_4 \text{ 独立}$$

引入正则对易关系:

$$[\pi_\mu(\mathbf{x}, t), A_\nu(\mathbf{x}', t)] = -i \delta_{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (4.45)$$

其他的 $[\pi_\mu, \pi_\nu] = [A_\mu, A_\nu] = 0$ 。

运动方程:

$$\dot{A}_\mu = i [H, A_\mu] \quad \dot{\pi}_\mu = i [H, \pi_\mu] \quad (4.46)$$

哈密顿量为:

$$\begin{aligned} H &= \int d^3 x \mathcal{H} \\ \mathcal{H} &= \frac{1}{2} (\pi_\mu \pi_\mu + \nabla A_\mu \cdot \nabla A_\mu) \end{aligned}$$

这中间可能导致能量不正定。

动量和角动量的形式:

$$\mathbf{P} = - \int \pi_\mu \nabla A_\mu d^3x$$

$$M_{jk} = -i \int d^3x \pi_\mu [L_{jk} + S_{jk}]_{\mu\nu} A_\nu$$

或者 $\mathbf{M} = -i \int d^3x \pi [\mathbf{L} + \mathbf{S}] \mathbf{A}$, $M_i = \epsilon_{ijk} M_{jk}$ 。

$\square A_\mu = 0$ 应该作为场算符满足的方程。

Lorentz 条件:

$$\chi = \partial_\mu A_\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad [\chi(\mathbf{x}, t), A_4(\mathbf{x}', t)] = 0 \quad (4.47)$$

与对易关系 $[\pi_4(\mathbf{x}, t), A_4(\mathbf{x}', t)] = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 矛盾。所以不能认为它是算符满足的条件。

动量表象: 【由 $\square A_\mu = 0$ 可以解出】

$$A_\mu = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \sum_{\lambda=1}^4 e_\mu^\lambda(\mathbf{k}) [a_\lambda(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \bar{a}_\lambda(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]$$

对波矢 $\mathbf{k}$, 取

$$\begin{aligned} e_1 &= (\boldsymbol{\epsilon}_1, 0) \\ e_2 &= (\boldsymbol{\epsilon}_2, 0) \\ e_3 &= \left(\frac{\mathbf{k}}{\omega}, 0\right) \\ e_4 &= (\mathbf{O}, 1) \end{aligned} \quad (4.48)$$

则有

$$\begin{aligned} e_\mu^\lambda(\mathbf{k}) e_\mu^{\lambda'}(\mathbf{k}) &= \delta^{\lambda\lambda'} \quad \text{正交 (相互之间)} \\ \sum_{\lambda=1}^4 e_\mu^\lambda(\mathbf{k}) e_\nu^\lambda(\mathbf{k}) &= \delta_{\mu\nu} \end{aligned}$$

反解出 $a_\lambda(\mathbf{k}), \bar{a}_\lambda(\mathbf{k})$, 则有:

$$[a_\lambda(\mathbf{k}), \bar{a}_{\lambda'}(\mathbf{k}')] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (4.49)$$

其他的 $[a_\lambda, a_{\lambda'}] = [\bar{a}_\lambda, \bar{a}_{\lambda'}] = 0$ 。

并有

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = i\delta_{\mu\nu} D(x - x') \quad (4.50)$$

$$P_\mu = \int d^3k k_\mu \sum_{\lambda=1}^4 \bar{a}_\lambda(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) \quad (4.51)$$

$$H = \int d^3k \omega(\mathbf{k}) \sum_{\lambda=1}^4 \bar{a}_\lambda(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) \quad (4.52)$$

因为 $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}, A_4^\dagger = -A_4$, 且 $e_\mu^{\lambda*} = e_\mu^\lambda$ (根据前面取的归一化矢量)。从而推出:

$$\begin{cases} \bar{a}_\lambda(\mathbf{k}) = a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) & \lambda = 1, 2, 3 \\ \bar{a}_\lambda(\mathbf{k}) = -a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) & \lambda = 4 \end{cases} \quad (4.53)$$

所以

$$H = \int d^3k \omega(\mathbf{k}) \left(\sum_{\lambda=1}^3 a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) - a_4^\dagger(\mathbf{k}) a_4(\mathbf{k}) \right) \quad (4.54)$$

令 $N_{\mathbf{k}_4} = -a_{\mathbf{k}_4}^\dagger a_{\mathbf{k}_4}$ ，则有 $[a_{\mathbf{k}_4}, a_{\mathbf{k}_4}^\dagger] = -\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ ，进一步可以得到 $[N_{\mathbf{k}_4}, a_{\mathbf{k}_4}^\dagger] = a_{\mathbf{k}_4}^\dagger$ 和 $[N_{\mathbf{k}_4}, a_{\mathbf{k}_4}] = -a_{\mathbf{k}_4}$ 。所以 $N_{\mathbf{k}_4}$ 得本征值为 $0, 1, \dots$ 。

假定真空态为 $a_{\mathbf{k}_4}|0\rangle = 0$ 和 $\langle 0|0\rangle = 1$ 。则 $a_{\mathbf{k}_4}^\dagger|0\rangle$ 的模为：

$$\begin{aligned} \langle 0|a_{\mathbf{k}_4} a_{\mathbf{k}_4}^\dagger|0\rangle &= \langle 0|[a_{\mathbf{k}_4}, a_{\mathbf{k}_4}^\dagger]|0\rangle \\ &= -\langle 0|0\rangle = -1 \end{aligned}$$

从而又结论：

$$\langle n_{\mathbf{k}_4} | n_{\mathbf{k}_4} \rangle = (-1)^{n_{\mathbf{k}_4}} \quad (4.55)$$

能量算符的平均值也可能为负数：

$$\begin{aligned} \langle n_{\mathbf{k}_4} | H | n_{\mathbf{k}_4} \rangle &= \omega(\mathbf{k}) \langle n_{\mathbf{k}_4} | N_{\mathbf{k}_4} | n_{\mathbf{k}_4} \rangle \\ &= \omega(\mathbf{k}) n_{\mathbf{k}_4} \langle n_{\mathbf{k}_4} | n_{\mathbf{k}_4} \rangle \\ &= (-1)^{n_{\mathbf{k}_4}} \omega(\mathbf{k}) n_{\mathbf{k}_4} \end{aligned}$$

从而出现了负能问题。

Lorentz 条件： $\chi = \partial_\mu A_\mu$ ， $\langle a | \chi | a \rangle = 0$ 。

将 Lorentz 条件化成下面的形式：

$$\partial_\mu A_\mu = \partial_\mu A_\mu^{(+)} + \partial_\mu A_\mu^{(-)} \quad (4.56)$$

其中 $A_\mu^{(+)}$ 代表（正频）消灭算符部分， $A_\mu^{(-)}$ 代表（负频）产生算符部分。

Lorentz 条件不能取 $\partial_\mu A_\mu |a\rangle = 0$ 。而必须取成 $\partial_\mu A_\mu^{(+)} |a\rangle = 0$ ，这个条件是充分的。

取厄密 $\langle a | \partial_\mu A_\mu^{(-)} = 0$ ，可以推出 $\langle a | \partial_\mu A_\mu^{(-)} + \partial_\mu A_\mu^{(+)} |a\rangle = \langle a | \partial_\mu A_\mu |a\rangle = 0$

定义：

$$L(\mathbf{k}) \equiv \sum_{\lambda=1}^4 k_\mu e_\mu^\lambda(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}| (a_3(\mathbf{k}) + i a_4(\mathbf{k})) \quad (4.57)$$

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} e_\mu^\lambda(\mathbf{k}) [a_\lambda(\mathbf{k}) e^{ikx} + \bar{a}_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ikx}] \quad (4.58)$$

又因为 $k_\mu e_\mu^{\lambda=1,2} = 0$ 、 $k_\mu e_\mu^{\lambda=3} = \mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = |\mathbf{k}|$ 、 $k_\mu e_\mu^{\lambda=4} = i k_0 = i |\mathbf{k}|$ 。

由 Lorentz 条件 $\partial_\mu A_\mu^{(+)} |a\rangle = 0$ 则有 $(a_3 + i a_4) |a\rangle = 0$ 或者 $\langle a | (a_3^\dagger - i a_4^\dagger) = 0$ 。

从而得到粒子数算符：

$$\begin{aligned} N_3(\mathbf{k}) + N_4(\mathbf{k}) &= a_3^\dagger(\mathbf{k}) a_3(\mathbf{k}) - a_4^\dagger(\mathbf{k}) a_4(\mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{2} (a_3^\dagger + i a_4^\dagger) (a_3 + i a_4) + \frac{1}{2} (a_3^\dagger - i a_4^\dagger) (a_3 - i a_4) \end{aligned} \quad (4.59)$$

所以我们有:

$$\langle a | N_3(\mathbf{k}) + N_4(\mathbf{k}) | a \rangle = 0$$

从而我们可以看出 $\lambda = 3$ 纵光子、 $\lambda = 4$ 标光子对能量动量及一切物理量不作任何贡献, 只剩下 $\lambda = 1, 2$ 的横光子。

Lorentz 条件可以消去负模态, 满足 Lorentz 条件的态具有如下形式:

$$L(\mathbf{k}) |a_f\rangle = 0 \quad (4.60)$$

但是 a_f 不一定是真空态, 他可以含有横光子和纵光子、标光子 (而后两者对物理量没有贡献, 没有实际的物理意义), 他可以表示为:

$$|a_f\rangle = R_f |a_0\rangle \quad (4.61)$$

其中 $|a_0\rangle$ 表示只含有横光子的态 ($\lambda = 1, 2$)。

R_f 的一般形式为:

$$R_f = 1 + \sum_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k}) L^\dagger(\mathbf{k}) + \cdots + \sum_{\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_n} f(\mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_n) L^\dagger(\mathbf{k}_1) \cdots L^\dagger(\mathbf{k}_n) + \cdots \quad (4.62)$$

从前面的定义式 (4.57) 可以推出:

$$\begin{aligned} [L(\mathbf{k}), L^\dagger(\mathbf{k}')] &= |\mathbf{k}| |\mathbf{k}'| \left[a_{\mathbf{k}3} + i a_{\mathbf{k}4}, a_{\mathbf{k}'3}^\dagger - i a_{\mathbf{k}'4}^\dagger \right] \\ &= |\mathbf{k}| |\mathbf{k}'| \left\{ \left[a_{\mathbf{k}3}, a_{\mathbf{k}'3}^\dagger \right] + \left[a_{\mathbf{k}4}, a_{\mathbf{k}'4}^\dagger \right] \right\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.63)$$

由于 $L(\mathbf{k})$ 和 $L^\dagger(\mathbf{k}')$ 对易, 所以有:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{k}) |a_f\rangle &= L(\mathbf{k}) R_f |a_0\rangle \\ &= R_f L(\mathbf{k}) |a_0\rangle = 0 \end{aligned} \quad (4.64)$$

现在来看一下不同的态之间的内积。

态 $|a_f\rangle$ 和 $|b_g\rangle$ 均满足 Lorentz 条件, 分别表示为: $|a_f\rangle = R_f |a_0\rangle$ 、 $|b_g\rangle = R_g |b_0\rangle$ 。它们的内积为:

$$\begin{aligned} \langle a_f | b_g \rangle &= \langle a_0 | R_f^\dagger R_g | b_0 \rangle \\ &= \langle a_0 | R_g R_f^\dagger | b_0 \rangle \\ &= \langle a_0 | b_0 \rangle \end{aligned} \quad (4.65)$$

两者的内积只涉及到物理横光子态的内积。

这中间用下面的条件:

$$\begin{aligned} R_f^\dagger |b_0\rangle &= \left(1 + \sum_{\mathbf{k}} f^*(\mathbf{k}) L(\mathbf{k}) + \cdots \right) |b_0\rangle \\ &= |b_0\rangle \end{aligned}$$

也就是说满足 Lorentz 条件的态的内积结果为物理横光子态的内积, 从而解决了负模态的问题。

第五章 旋量场的量子化

旋量场指的是自旋为 $1/2$ 的量子场，有轻子、夸克等。

§5.1 Dirac 方程及其变换性质

单粒子的相对论波方程:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = H \psi \quad (5.1)$$

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\nabla) + \beta m \quad (5.2)$$

其中旋量 $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}$ 和 β 都是 4×4 的矩阵。

经典到量子的对应:

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \quad P \rightarrow -i\nabla \quad (5.3)$$

相对论协变方程:

$$P_\mu P_\mu = -m^2$$

利用上面的对应关系，则可以推出 Klein-Gordon 方程:

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = m^2 \phi$$

该方程反应了相对论的能量动量关系，即具有明显得相对论协变性。

但是，作为 Schrödinger 方程推广的 Klein-Gordon 方程（视为单粒子波动方程）存在着负几率的困难。

Dirac 方程的引进:

1. 时间和空间的微商都是一次的。

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = [\alpha_i (-i\partial_i) + \beta m] \psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) \psi \quad (5.4)$$

2. ψ 一定是多分量的， $\boldsymbol{\alpha}, \beta$ 一定是 $n \times n$ 的矩阵。如果想试图克服负几率的困难， $\psi^* \psi$ 作为几率密度， $\int d^3x \psi^* \psi$ 为守恒量，所以 $\psi^* \psi$ 必须是 4 - 矢量的时间分量， ψ 就不能是简单的标量。

3. ψ 的每一个分量都必须满足 Klein-Gordon 方程，也就是 $(\partial_\mu \partial_\mu - m) \psi_\alpha = 0$ 。

从 Dirac 方程 (5.4) 可以知道:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi &= (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) \psi \\ &= (\alpha_i p_i + \beta m) (\alpha_j p_j + \beta m) \psi \\ &= (\alpha_i \alpha_j p_i p_j + \alpha_i p_i \beta m + \beta m \alpha_j p_j + \beta^2 m^2) \psi \\ &= \left\{ \frac{1}{2} (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j + (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) m p_i + \beta^2 m^2 \right\} \psi \end{aligned} \quad (5.5)$$

引入如下的条件:

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i \equiv \{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \quad (5.6)$$

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad (5.7)$$

$$\beta^2 = 1 \quad (5.8)$$

可以将 (5.5) 式化成:

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (\mathbf{p}^2 + m^2) \psi \quad (5.9)$$

4. $\alpha_i^2 = 1, \beta^2 = 1$, 而且都是 $N \times N$ 的矩阵, 这意味着矩阵的本征值为 ± 1 , 同时由于 (5.7) 式可以知道 $\beta \alpha_i \beta = -\alpha_i$, 所以:

$$\text{Tr}[\alpha_i] = -\text{Tr}[\beta \alpha_i \beta] = -\text{Tr}[\beta^2 \alpha_i] = -\text{Tr}[\alpha_i] = 0 \quad (5.10)$$

所以 α_i 矩阵的迹为零, 所以 N 必须为偶数 (因为迹为本征值之和, 而本征值为 ± 1)。

同时, 又由于 $N = 2$ 不行, 因为, 这时独立的矩阵为 Pauli 矩阵和单位矩阵, 虽然它们满足 (5.6) 式所要求的条件。但是, 它们和单位矩阵是对易的, 不满足 (5.7) 式。所以, 最小的整数 $N = 4$ 。

一般来说, 采取 Pauli-Dirac 表象:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

§5.2 Dirac 方程的协变形式

定义:

$$\gamma \equiv -i\beta\alpha \quad (5.12)$$

$$\gamma_4 \equiv \beta \quad (5.13)$$

从 α, β 矩阵的对易关系可以知道 $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu$ 。

Dirac 方程可以改写成:

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi(x) = 0 \quad (5.14)$$

这就是 Dirac 方程的协变形式。

定义

$$\gamma_5 \equiv \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = \frac{1}{4!} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\rho \quad (5.15)$$

其中 $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ 为反对称张量 (轮换规则)。同时还有 $\gamma_5 \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_5 = 0$ 和 $\gamma_5^2 = 1$ 。

总结一下, 就有

$$\gamma_\mu \quad \begin{cases} \gamma = -i\beta\alpha \\ \gamma_4 = \beta \end{cases} \quad \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \quad (5.16)$$

$$\gamma_5 \quad \begin{cases} \gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \\ \{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0 \end{cases} \quad \gamma_5^2 = 1 \quad (5.17)$$

Dirac 方程的厄密形式:

定义 $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_4$ 。对 (5.14) 式取厄米共轭, 则有 $(x_\mu = (x, it))$:

$$\psi^\dagger \left(\gamma_\mu \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_\mu^\dagger} + m \right) = 0$$

两边乘以 γ_4

$$\psi^\dagger \left(\gamma_\mu \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_\mu^\dagger} + m \right) \gamma_4 = 0$$

这中间用到 $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$, $x_4^\dagger = -x_4$, 从而有

$$\begin{aligned} \psi^\dagger \gamma_4 \left(\gamma_\mu \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_\mu} - m \right) &= 0 \\ \bar{\psi} \left(\gamma_\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - m \right) &= 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

§5.2.1 单粒子的相对论波方程

哈密顿量为

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m \quad (5.19)$$

1. $[\mathbf{p}, H] = 0$,

$$\frac{dx}{dt} = [x, H]/i = [x, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{P}]/i = \alpha_x$$

所以 $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\alpha}$ 相当于单粒子的运动速度。

2. 自旋, 角动量

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{l}_i &= -i [\hat{l}_i, H] = -i [\hat{l}_i, \alpha_j P_j] = -i \alpha_j [\hat{l}_i, P_j] \\ &= \epsilon_{ijk} \alpha_j P_k \end{aligned}$$

所以

$$\frac{d}{dt} \mathbf{l} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p} \quad \sim \mathbf{v} \times \mathbf{p} \quad (5.20)$$

引入新的物理量

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} = -\gamma_5 \boldsymbol{\alpha} \quad (5.21)$$

容易证明 $[\boldsymbol{\Sigma}, H] = -2i(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p})$, $\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{l}} + 1/2 \boldsymbol{\Sigma}$ 为守恒量。即 $[\hat{\mathbf{j}}, H] = 0$ 。

3. Helicity (螺旋度), 定义为:

$$h \equiv \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad (5.22)$$

因为 $\hat{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{p} = 0$, 因此 $[h, H] = 0$, $h^2 = 1 \Rightarrow h = \pm 1$, 为守恒量。

Dirac 方程的 Lorentz 协变性:

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi = 0$$

变换 $x \rightarrow x' = \alpha x, x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu$: 则有 $\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \Lambda \psi(x)$, $\psi'_\alpha(x') = \Lambda_{\alpha\beta} \psi_\beta(x)$ (4 分量)。

Dirac 方程对应的协变形式为:

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x'_\mu} + m \right) \psi'(x') = 0$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \alpha_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \quad \because \begin{cases} \alpha_{\mu\lambda} \alpha_{\nu\lambda} = \delta_{\mu\nu} \\ \alpha_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu} \end{cases} \quad (5.23)$$

代入则有:

$$(\gamma_\mu \alpha_{\mu\nu} \partial_\nu + m) \Lambda \psi(x) = 0$$

如果 $\Lambda^{-1} \gamma_\mu \Lambda \alpha_{\mu\nu} = \gamma_\nu$, 则从上面就可以推出:

$$(\gamma_\nu \partial_\nu + m) \psi(x) = 0$$

所以, 协变条件是要 Λ 满足 $\Lambda^{-1} \gamma_\mu \Lambda \alpha_{\mu\nu} = \gamma_\nu$ 。利用 $\alpha_{\mu\nu} \alpha_{\lambda\nu} = \delta_{\lambda\mu}$, 再令 $\lambda \rightarrow \mu$, 则有

$$\Lambda^{-1} \gamma_\mu \Lambda = \alpha_{\mu\nu} \gamma_\nu \quad (5.24)$$

Lorentz 转动, $\alpha_{44} > 0$ (无穷小), 则有

$$\alpha_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu} \quad (5.25)$$

$$\Lambda = I + \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} + O(\epsilon^2) \quad (5.26)$$

其中 $\sigma_{\mu\nu} = 1/2i (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$, 对于一般的场来说有

$$\Lambda = I + \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} + O(\epsilon^2)$$

对于 Dirac 场来说,

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \quad (5.27)$$

由 (5.26) 式可以得到:

$$\Lambda^{-1} = 1 - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} \quad (5.28)$$

则需要证明 $\Lambda^{-1} \gamma_\mu \Lambda = \alpha_{\mu\nu} \gamma_\nu$ 。利用 $[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$, 其中 $\{A, B\} = AB + BA$ 。则有:

$$\begin{aligned} i[\sigma_{\mu\nu}, \gamma_\lambda] &= [\gamma_\mu \gamma_\nu, \gamma_\lambda] \\ &= 2\gamma_\mu \delta_{\lambda\nu} - 2\gamma_\nu \delta_{\mu\lambda} \quad (\mu \neq \nu) \end{aligned} \quad (5.29)$$

所以

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1} \gamma_\lambda \Lambda &= \gamma_\lambda + \frac{1}{2} (\epsilon_{\lambda\nu} \gamma_\nu - \epsilon_{\mu\lambda} \gamma_\mu) \\ &= \gamma_\lambda + \epsilon_{\lambda\nu} \gamma_\nu = (\delta_{\lambda\nu} + \epsilon_{\lambda\nu}) \gamma_\nu \\ &= \alpha_{\lambda\nu} \gamma_\nu \end{aligned}$$

态函数的变换形式为:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \Lambda \psi(x) \quad (5.30)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)\Lambda^{-1} \quad (5.31)$$

式 (5.31) 的推导过程如下:

$$\begin{aligned} \because \bar{\psi}'(x') &= \bar{\psi}'^\dagger(x')\gamma_4 \\ \therefore \bar{\psi}'(x') &= [\Lambda\psi(x)]^\dagger\gamma_4 = \psi^\dagger(x)\gamma_4\Lambda^\dagger\gamma_4 \end{aligned}$$

又因为

$$\gamma_4\Lambda^\dagger\gamma_4 = \gamma_4\left(1 - \frac{i}{4}\epsilon_{\mu\nu}^*\sigma_{\mu\nu}^\dagger\right)\gamma_4$$

ϵ_{ij} 为实, ϵ_{i4} 为虚。这是因为 $x'_\mu = \alpha_{\mu\nu}x_\nu$, $x = (\mathbf{x}, it)$ 又因为 $\sigma_{\mu\nu}^\dagger = \sigma_{\mu\nu}$, 所以

$$\begin{aligned} \gamma_4\Lambda^\dagger\gamma_4 &= \gamma_4\left(1 - \frac{i}{4}\epsilon_{\mu\nu}^*\sigma_{\mu\nu}\right)\gamma_4 \\ &= 1 - \frac{i}{4}\epsilon_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = \Lambda^{-1} \end{aligned}$$

双线性协变量:

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}\Lambda\psi(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x) \quad \text{标量} \quad (5.32)$$

$$\bar{\psi}'(x')\gamma_\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda\psi(x) = \alpha_{\mu\nu}\bar{\psi}(x)\gamma_\nu\psi(x) \quad \text{矢量} \quad (5.33)$$

$$\bar{\psi}'(x')\gamma_\mu\gamma_\nu\psi'(x') \rightarrow \alpha_{\mu\rho}\alpha_{\nu\sigma}\alpha_{\mu\nu}\bar{\psi}(x)\gamma_\rho\gamma_\sigma\psi(x) \quad \text{张量} \quad (5.34)$$

即 $\bar{\psi}\psi$ 为标量, $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ 为矢量, $ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ 为四度电流。

§5.3 Dirac 方程的平面波解

自由的 Dirac 方程的形式为:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = [\boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\nabla) + \beta]\psi$$

平面波特解为:

$$\psi = W(\mathbf{p})e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \beta\omega t} \quad (5.35)$$

其中 W 为四分量的列矩阵。

代入到 Dirac 方程中可以得到:

$$\omega \cdot W = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)W \quad (5.36)$$

1. $\omega = +E = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$, 这时 (5.36) 式为:

$$EW^{(+)} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)W^{(+)} \quad (5.37)$$

其中

$$W^{(+)}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{E + m}\varphi \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

在这里 φ 为二分量。

2. $\omega = -E = -\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$, 这时 (5.36) 式为:

$$-EW^{(-)} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) W^{(-)} \quad (5.39)$$

其中

$$W^{(-)}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \varphi \\ \varphi \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

再回到 (5.36) 式, 令

$$W = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

φ, χ 为 Pauli 二分量旋量。另外, $\boldsymbol{\alpha}, \beta$ 采用 Pauli - Dirac 表象:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

所以 Dirac 方程可以写成为:

$$\begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

则有:

$$\begin{cases} m\varphi + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \chi = \omega \varphi \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \varphi - m\chi = \omega \chi \end{cases} \quad (5.43)$$

从上面第二个式子可以得到 $\chi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m+\omega} \varphi$, 代入到第一个式子中去, 则有:

$$\begin{aligned} (\omega - m)\varphi &= \frac{1}{\omega + m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \varphi \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{\omega + m} \varphi \end{aligned}$$

所以, 可以得到:

$$\omega^2 \varphi = (\mathbf{p}^2 + m^2) \varphi$$

从而有

$$\omega = \pm E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

1. 正能解形式 $\omega = +E$, 则可以推出 $W = W^{(+)}$ 。

2. 负能解:

从前面的第二个式子出发, 可以有 $(-E + m) \chi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \varphi$, 令 $\varphi = \frac{-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m+\omega} \chi$, 则有:

$$(-E + m) \chi = \frac{-1}{E + m} \mathbf{p}^2 \chi \Rightarrow W = \begin{pmatrix} \frac{-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m+E} \chi \\ \chi \end{pmatrix} = W^{(-)}(\mathbf{p})$$

由此可以定义:

(5.44)

(5.45)

下标 r 代表自旋分量, 其中

(5.46)

共轭方程为:

(5.47)

也就是说 $u(p) \rightarrow (p, E)$, $v(p) \rightarrow (-p, -E)$ 。

(5.48)

所以, 由 $\bar{u}(p) = u^\dagger(p)\gamma_4$ 得到

(5.49)

同样可以得到

(5.50)

(5.51)

所以

(5.52)

(5.53)

(5.54)

$$(5.55)$$

由于 r 是自旋的标志 ($r = 1, s = -1/2; r = 2, s = 1/2$), 所以

归一化条件为:

因为：

即 $\bar{u}(p)u(p) = -\bar{v}(p)v(p) = 1$, $\bar{u}_r(p)u_s(p) = -\bar{v}_r(p)v_s(p) = \delta_{rs}$ 。

完备性:

定义投影算符:

可得:

$$\Lambda_{-}(p) = - \sum_{r=1,2} \frac{m+E}{2m} \begin{pmatrix} \chi_r \frac{\mathbf{p}^2}{(m+E)^2} \chi_r^\dagger & -\chi_r \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m+E} \chi_r^\dagger \\ \chi_r \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m+E} \chi_r^\dagger & -\chi_r \chi_r^\dagger \end{pmatrix} = -\frac{i\hat{p}+m}{2m} \quad (5.62)$$

容易证明: $\Lambda_+ u(p) = u(p), \Lambda_+ v(p) = 0, \Lambda_- u(p) = 0, \Lambda_- v(p) = v(p); \Lambda_+ + \Lambda_- = I, \Lambda_+^2 = \Lambda_+, \Lambda_-^2 = \Lambda_-$, $\Lambda_+(p)\Lambda_-(p) = \Lambda_-(p)\Lambda_+(p) = 0$ 。

假设 $\Lambda_{\pm}(p) = A_{\pm} + B_{\pm}\gamma \cdot p$, 同时由于 $(i\hat{p} - m)v(p) = 0, \Lambda_+v(p) = 0, \Lambda_+(p) = C(i\hat{p} - m)$, 利用 $\Lambda_+^2 = \Lambda_+ \Rightarrow C = \frac{-1}{2m}$, 所以:

§5.4 旋量场的量子化

1. 经典场的正则形式

由场方程可以得出拉氏量为

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi} (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi \quad (5.64)$$

拉氏量的变换 $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$, 则:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2} \left(\bar{\psi} \gamma_\mu \vec{\partial}_\mu \psi - \bar{\psi} \overleftarrow{\partial}_\mu \gamma_\mu \psi \right) - m \bar{\psi} \psi$$

从中可以看出，两者只差一个散度项，所以：

$$\int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L}'$$

广义动量为：

$$\pi_\alpha \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha} = i \psi_\alpha^\dagger \quad (5.65)$$

厄密项为：

$$\pi^\dagger = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^\dagger} = 0 \quad (5.66)$$

哈密顿量密度为：

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \pi \dot{\psi} - \mathcal{L} &= i \psi^\dagger \dot{\psi} - \mathcal{L} = \psi^\dagger (\gamma_4 \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + \gamma_4 m) \psi \\ &= \bar{\psi} (\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m) \psi = \psi^\dagger (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) \psi \end{aligned} \quad (5.67)$$

哈密顿量为：

$$H = \int d^3x \mathcal{L} = \int d^3x \psi^\dagger (\boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\nabla) + \beta m) \psi \quad (5.68)$$

结果表现出不正定。

能量动量张量为：

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \psi \cdot \bar{\psi} \gamma_\nu - \bar{\psi} (\gamma_\mu \partial_\nu + m) \psi \delta_{\mu\nu} \quad (5.69)$$

有满足 $\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0$ ，所以存在相应的守恒量：

$$P_\mu = -i \int T_{\mu 4} d^3x = -i \int (\partial_\mu \psi \cdot \psi^\dagger - \bar{\psi} (\gamma_\mu \partial_4 + m) \psi \delta_{\mu 4}) d^3x \quad (5.70)$$

其中

$$\mathbf{P} = - \int \pi \nabla \psi d^3x, \quad \text{和} \quad P_4 = iH$$

相应的守恒流为：

$$j_\mu = i \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \quad (5.71)$$

由 $\partial_\mu j_\mu = 0$ 可以推出守恒荷：

$$Q = \int d^3x \psi^\dagger \psi \quad (5.72)$$

2. 通常量子化引起的困难

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E}} (C_r(\mathbf{p}) u_r(p) e^{ipx} + d_r^\dagger(\mathbf{p}) v_r(p) e^{-ipx}) \\ \bar{\psi}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E}} (C_r^\dagger(\mathbf{p}) \bar{u}(p) e^{-ipx} + d_r(\mathbf{p}) \bar{v}(p) e^{ipx}) \end{aligned} \quad (5.73)$$

经典的四维动量的形式为：

$$P_\mu = \int d^3p p_\mu \sum_{r=1,2} (C_r^*(\mathbf{p})C_r(\mathbf{p}) - d_r(\mathbf{p})d_r^*(\mathbf{p})) \rightarrow \text{能量不正定} \quad (5.74)$$

$$Q = \int d^3p \sum_{r=1,2} (C_r^*(\mathbf{p})C_r(\mathbf{p}) + d_r(\mathbf{p})d_r^*(\mathbf{p})) \rightarrow \text{荷正定} \quad (5.75)$$

如果按照通常的正则量子化规则引入对易关系，即：

$$\begin{aligned} [\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \pi_\beta(\mathbf{x}', t)] &= [\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), i\psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}', t)] \\ &= i\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned}$$

其余为零。

很自然就可以得到：

$$\begin{aligned} [C_r(\mathbf{p}), C_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')] &= [d_r(\mathbf{p}), d_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')] \\ &= \delta_{rr'}\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \end{aligned}$$

此时可以发现：

(2.1) 负能困难，场的能量不正定

(2.2) 与 Pauli 原理相矛盾

3. 反对易关系与费米统计

$$\begin{aligned} \{b, b^\dagger\} &= 1 \\ \{b, b\} &= \{b^\dagger, b^\dagger\} = 0 \end{aligned} \quad (5.76)$$

附： $[A, B] = AB - BA, \{A, B\} = AB + BA$ 。

同样定义粒子数算符 $N = b^\dagger b$ ，同时由反对易关系可以知道 $b^2 = b^{\dagger 2} = 0$ ，所以 $N^2 = b^\dagger b b^\dagger b = b^\dagger(1 - b^\dagger b)b = -b^{\dagger 2}b^2 + b^\dagger b = N$ ，所以有 $N(N - 1) = 0$ 。

由 $N|n\rangle = n|n\rangle$ ，可知 $n(n - 1) = 0$ ，所以粒子数算符的本征值只能取 0，1。

另外由对易关系可以推出：

$$[N, b] = -b \quad [N, b^\dagger] = b^\dagger$$

所以 b 为消灭算符， $b^\dagger$ 为产生算符， N 为粒子数算符。

4. Dirac 场的量子化

由于

$$\pi_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_\alpha} = i\varphi_\alpha^\dagger \quad (5.77)$$

引入对易关系

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), i\psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}', t)\} = i\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (5.78)$$

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \psi_\beta(\mathbf{x}', t)\} = \{\psi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}, t), \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}', t)\} = 0 \quad (5.79)$$

附：

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B \quad (5.80)$$

运动方程：

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t) &= i[H, \psi_\alpha(\mathbf{x}, t)] \rightarrow (\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi = 0 \\
\dot{\pi}_\alpha(\mathbf{x}, t) &= i[H, \pi_\alpha(\mathbf{x}, t)] \rightarrow \bar{\psi}(\gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu + m) = 0
\end{aligned} \tag{5.81}$$

动量表象:

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{r=1,2} \{C_r(\mathbf{p}) u_r(p) e^{ipx} + d_r^\dagger(\mathbf{p}) v_r(p) e^{-ipx}\} \\
\bar{\psi}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{r=1,2} \{c_r^\dagger(\mathbf{p}) \bar{u}_r(p) e^{-ipx} + d_r(\mathbf{p}) \bar{v}_r(p) e^{ipx}\}
\end{aligned} \tag{5.82}$$

反解出来后有 (这中间利用归一化条件 $u^\dagger(p)u(p) = v^\dagger(p)v(p) = E/m$) :

$$\begin{aligned}
C_r(\mathbf{p}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}} \int d^3x e^{-ipx} u_r^\dagger(p) \psi(x) \\
C_r^\dagger(\mathbf{p}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}} \int d^3x e^{ipx} \psi^\dagger(x) u_r(p)
\end{aligned} \tag{5.83}$$

$$\begin{aligned}
d_r(\mathbf{p}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}} \int d^3x e^{-ipx} \psi^\dagger(x) v_r(p) \\
d_r^\dagger(\mathbf{p}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}} \int d^3x e^{ipx} v_r^\dagger(p) \psi(x)
\end{aligned} \tag{5.84}$$

由此可以推出反对易关系

$$\{C_r(\mathbf{p}), C_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')\} = \delta_{rr'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \tag{5.85}$$

$$\{d_r(\mathbf{p}), d_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')\} = \delta_{rr'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \tag{5.86}$$

哈密顿量:

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3p \sum_{r=1,2} E(\mathbf{p}) \{C_r^\dagger(\mathbf{p}) C_r(\mathbf{p}) - d_r(\mathbf{p}) d_r^\dagger(\mathbf{p})\} \\
&= \int d^3p \sum_{r=1,2} E(\mathbf{p}) \{C_r^\dagger(\mathbf{p}) C_r(\mathbf{p}) + d_r^\dagger(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p}) - 1\}
\end{aligned} \tag{5.87}$$

其中负的零点能可以用正规乘积消掉。

守恒荷

$$\begin{aligned}
Q &= \int d^3p \sum_{r=1,2} \{C_r^\dagger(\mathbf{p}) C_r(\mathbf{p}) + d_r(\mathbf{p}) d_r^\dagger(\mathbf{p})\} \\
&= \int d^3p \sum_{r=1,2} \{C_r^\dagger(\mathbf{p}) C_r(\mathbf{p}) - d_r^\dagger(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p}) + 1\}
\end{aligned} \tag{5.88}$$

量子化的意义:

(4.1) 能量正定

(4.2) 满足 Pauli 原理

自旋 - 统计关系:

(4.1) 对于自旋为整数的场, 必须引入对易关系, 解决了能量不正定, 几率不正定的问题, 对应 Bose 统计。相应的对易关系为 $[\psi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 。

(4.2) 对于自旋为半奇数的场, 须引入反对易关系从而解决能量不正定的问题, 对应 Fermi 统计。相应的对易关系为 $[\psi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)]_+ = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 。

只有这样才能满足所谓的微观因果性。

正规乘积 N : 将消灭算符写在产生算符的右边, 交换两者的时候, 对于费米子产生一个负号, 而对于波色子不出现负号。

$$\begin{aligned}
 N(\bar{\psi}_\alpha \psi_\beta) &= N\left((\bar{\psi}_\alpha^{(+)} + \bar{\psi}_\alpha^{(-)})(\psi_\beta^{(+)} + \psi_\beta^{(-)})\right) \\
 &= N\left\{\bar{\psi}_\alpha^{(+)}\psi_\beta^{(+)} + \bar{\psi}_\alpha^{(-)}\psi_\beta^{(+)} + \bar{\psi}_\alpha^{(-)}\psi_\beta^{(-)} + \bar{\psi}_\alpha^{(+)}\psi_\beta^{(-)}\right\} \\
 &= \left\{\bar{\psi}_\alpha^{(+)}\psi_\beta^{(+)} + \bar{\psi}_\alpha^{(-)}\psi_\beta^{(+)} + \bar{\psi}_\alpha^{(-)}\psi_\beta^{(-)} - \psi_\beta^{(-)}\bar{\psi}_\alpha^{(+)}\right\}
 \end{aligned} \tag{5.89}$$

其中, 哈密顿量的正规乘积形式:

$$\begin{aligned}
 H &= \int d^3x N(\bar{\psi}(\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m)\psi) \\
 &= \sum_p \sum_{r=1,2} E(p) \left(C_{\mathbf{p},r}^\dagger C_{\mathbf{p},r} + d_{\mathbf{p},r}^\dagger d_{\mathbf{p},r}\right)
 \end{aligned} \tag{5.90}$$

守恒荷的正规乘积形式为:

$$\begin{aligned}
 Q &= \int d^3x N(\psi^\dagger \psi) \\
 &= \sum_p \sum_{r=1,2} \left(C_{\mathbf{p},r}^\dagger C_{\mathbf{p},r} - d_{\mathbf{p},r}^\dagger d_{\mathbf{p},r}\right)
 \end{aligned} \tag{5.91}$$

5. 对易关系的相对论协变性

回顾以前的内容, 对于实标量场有:

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = i\Delta(x - y) \tag{5.92}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{2\omega} \left(e^{ik(x-y)} - e^{-ik(x-y)}\right) \tag{5.93}$$

当 $x \rightarrow x', y \rightarrow y'$, 相应的 $\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x'), \varphi(y) \rightarrow \varphi'(y')$ 时仍旧有:

$$[\varphi'(x'), \varphi'(y')] = i\Delta(x' - y') \tag{5.94}$$

同样对于 Dirac 场也有同样的结论。

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \bar{\psi}_\beta(\mathbf{x}', t')\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{m}{E} \left[\left(\frac{-i\hat{p} + m}{2m}\right)_{\alpha\beta} e^{ip(x-x')} - \left(\frac{i\hat{p} + m}{2m}\right)_{\alpha\beta} e^{-ip(x-x')} \right]$$

$$\text{迂回积分} = -i(\gamma_\mu \partial_\mu - m)_{\alpha\beta} \Delta(x - x') = -i(\hat{\partial} - m)_{\alpha\beta} \Delta(x - x')$$

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')\} = \{\bar{\psi}_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} = 0 \tag{5.95}$$

即有

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} = -i(\hat{\partial} - m)_{\alpha\beta} \Delta(x - y) \tag{5.96}$$

对于参考系的变换 $x \rightarrow x' = ax, \psi(x) \Rightarrow \psi'(x') = \Lambda\psi(x)$, 则有:

$$\{\psi'_\alpha(x'), \bar{\psi}'_\beta(y')\} = -i(\hat{\partial}' - m)_{\alpha\beta} \Delta(x' - y') \tag{5.97}$$

因为

$$\begin{aligned}
\{\psi'_\alpha(x'), \bar{\psi}'_\beta(x')\} &= \Lambda_{\alpha\alpha'}\Lambda_{\beta\beta'}^{-1} \{\psi_{\alpha'}(x), \bar{\psi}_{\beta'}(y)\} \\
&= \Lambda_{\alpha\alpha'}\Lambda_{\beta\beta'}^{-1}(-i)(\hat{\partial} - m)_{\alpha'\beta'}\Delta(x-y) \\
&= \left((\Lambda\gamma_\mu\Lambda^{-1})_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\delta_{\alpha\beta} \right) (-i)\Delta(x-y) \\
&= \left[\left(\alpha_{\mu\nu}\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right)_{\alpha\beta} - m\delta_{\alpha\beta} \right] (-i)\Delta(x-y) \\
&= \left(\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x'_\nu} - m \right)_{\alpha\beta} (-i)\Delta(x-y) \\
&= \left(\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x'_\nu} - m \right)_{\alpha\beta} (-i)\Delta(x'-y') \\
&= -i(\hat{\partial}' - m)_{\alpha\beta}\Delta(x'-y')
\end{aligned}$$

反对易子（双线性协变量）在类空间隔中为零。

$$j_\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) = \bar{\psi}_\alpha(x)(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\psi_\beta(x) \quad (5.98)$$

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) = \bar{\psi}_\alpha\psi_\alpha \quad (5.99)$$

利用对易与反对易关系式可得：

$$\begin{aligned}
& [\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x), \bar{\psi}_r(x')\psi_\delta(x')] \\
&= \bar{\psi}_\alpha(x) \{ \psi_\beta, \bar{\psi}_r(x') \} \psi_\delta(x') - \{ \bar{\psi}_\alpha(x), \bar{\psi}_r(x') \} \psi_\beta(x) \psi_\delta(x') \\
&\quad + \bar{\psi}_\alpha(x) \bar{\psi}_r(x') \{ \psi_\beta(x), \psi_\delta(x') \} - \bar{\psi}_r(x') \{ \bar{\psi}_\alpha(x), \psi_\delta(x') \} \psi_\beta(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

（如果 $(x-x')^2 > 0$ ，类空间隔）

（ $\Delta(x-y) = 0, \text{if } (x-y)^2 > 0$ ）

所以可以推出满足微观因果性。

$$\left. \frac{\partial \Delta(x)}{\partial t} \right|_{t=0} = -\delta(\mathbf{x}) \quad (5.100)$$

$$\left. \frac{\partial \Delta(x)}{\partial x_i} \right|_{t=0} = 0 \quad (5.101)$$

对于类空间隔可以知道 $\delta(\mathbf{x}) = 0$ ，唯一的奇点在光锥。

第六章 场的相互作用和分立对称变换

§6.1 电磁相互作用

§6.1.1 旋量场与电磁场的相互作用

对于自由粒子 $H = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ ，对应到电磁场，则有 $H = eA_0 + \sqrt{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + m^2}$ 。相应的变换为：

$$\left. \begin{aligned} H &\rightarrow H - eA_0 \\ \mathbf{p} &\rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A} \end{aligned} \right\} p_\mu \rightarrow p_\mu - eA_\mu, \text{ 其中 } p_\mu = (\mathbf{p}, iH)。在量子力学中 } p_\mu \rightarrow -i\partial/\partial x_\mu = -i\partial_\mu, \text{ 量子场论中 } p_\mu \rightarrow p_\mu - eA_\mu \implies \partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ieA_\mu \text{ 协变微商。}$$

自由 Dirac 场：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D &= -\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi \rightarrow -\bar{\psi}(\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu))\psi \\ &= -\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi + ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu \\ &= \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_I \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{L}_I = ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$ 。

所以最后，拉氏量的形式为：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{e.m.} + \mathcal{L}_I \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi + ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu \\ \text{Lorentz Gauge} &\rightarrow -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial_\nu A_\mu) - \bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi + ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu \end{aligned} \quad (6.1)$$

利用 Euler-Lagrange 方程可以得到：

$$\begin{cases} (\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi &= ie\gamma_\mu\psi A_\mu \\ \bar{\psi}(\gamma_\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - m) &= -ie\bar{\psi}\gamma_\mu A_\mu \\ \square A_\mu &= -ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \end{cases} \quad (6.2)$$

注意这中间用到了 Lorentz Gauge $\partial_\mu A_\mu = 0$ 。

上面方程中第三个可以表示为：

$$\square A_\mu = -ej_\mu \quad (6.3)$$

其中 $j_\mu = i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ 满足流守恒方程 $\partial_\mu j_\mu = 0$ ，即

$$i\left(\bar{\psi}\gamma_\mu \overleftarrow{\partial}_\mu \psi + \bar{\psi}\gamma_\mu \partial_\mu \psi\right) = 0 \rightarrow \int j_0(x)d^3x = \text{守恒量}$$

$\square(\partial_\mu A_\mu) = -e\partial_\mu j_\mu = 0$ 任意时刻都有 $\partial_\mu A_\mu = 0$ ， $((\partial_\mu A_\mu)_{t=0} = 0, \partial/\partial t(\partial_\mu A_\mu)|_{t=0} = 0)$ 。

广义动量

$$\begin{aligned} \pi_4 &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = i\psi^\dagger \\ \pi_\mu &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = \dot{A}_\mu \end{aligned}$$

正则量子化关系 $\{p, q\} = 1$ ：

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}', t)\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$\begin{aligned}
[A_\mu(\mathbf{x}, t), \dot{A}_\nu(\mathbf{x}', t)] &= i\delta_{\mu\nu}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
[\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), A_\mu(\mathbf{x}', t)] &= [\psi(\mathbf{x}, t), \dot{A}_\mu(\mathbf{x}', t)] = 0 \\
\{\psi_\alpha, \psi_\beta\} &= \{\psi_\alpha^\dagger, \psi_\beta^\dagger\} = 0 \\
[A_\mu, A_\nu] &= [\dot{A}_\mu, \dot{A}_\nu] = 0
\end{aligned}$$

拉氏量密度

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \pi_4 \dot{\psi} + \pi_\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} \\
&= \mathcal{H}_D + \mathcal{H}_{e.m.} + \mathcal{H}_I
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_D &= \bar{\psi}(\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m)\psi \\
\mathcal{H}_{e.m.} &= \frac{1}{2} \{\pi_\mu \pi_\mu + (\nabla A_\mu)(\nabla A_\mu)\} \\
\mathcal{H}_I &= -\mathcal{L}_I = -ej_\mu A_\mu = -ie\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}_\mu\psi A_\mu
\end{aligned}$$

哈密顿量 $H = \int \mathcal{H} d^3x = H_D + H_{e.m.} + H_I$ 。

运动方程为

$$\begin{aligned}
\dot{\psi} &= i[H, \psi] & \dot{\pi}_4 &= i[H, \pi_4] \\
\dot{A}_\mu &= i[H, A_\mu] & \dot{\pi}_\mu &= i[H, \pi_\mu]
\end{aligned}$$

相应的 $\langle a | \partial_\mu A_\mu | a \rangle = 0$ 。

形式的写为 $\dot{H} = 0, \dot{\mathbf{p}} = i[H, \mathbf{p}] = 0$, $\mathbf{p} = -\int d^3x (\pi_4 \nabla \psi + \pi_\mu \nabla A_\mu)$ 。(参看电磁场和旋量场的量子化)

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{x}, t) &= e^{iHt} \psi(\mathbf{x}, 0) e^{-iHt} \\
A_\mu(\mathbf{x}, t) &= e^{iHt} A_\mu(\mathbf{x}, 0) e^{-iHt}
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\nabla \psi &= i[H, \mathbf{p}] & \psi(\mathbf{x}, t) &= e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \psi(\mathbf{0}, t) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \\
\nabla A_\mu &= i[A_\mu, \mathbf{p}] & A_\mu(\mathbf{x}, t) &= e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} A_\mu(\mathbf{0}, t) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}
\end{aligned}$$

合并起来则有

$$\begin{cases} \psi(x) &= e^{-ipx} \psi(0) e^{ipx} \\ A_\mu(x) &= e^{-ipx} A_\mu(0) e^{ipx} \end{cases} \quad p_\mu = (\mathbf{p}, iH) \quad (6.4)$$

Heisenberg 表象中的算符时空平移。

§6.1.2 标量场和电磁场之间的相互作用

自由复标量场:

$$\mathcal{L} = -(\partial_\mu \varphi^*)(\partial_\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi \quad (6.5)$$

代换

$$\begin{aligned}\partial_\mu \varphi &\rightarrow (\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi \\ \partial_\mu \varphi^* &\rightarrow (\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi^*\end{aligned}\quad (6.6)$$

则有

$$\mathcal{L}_I = ie[(\partial_\mu \varphi^*)\varphi - \varphi^*(\partial_\mu \varphi)]A_\mu - e^2 \varphi^* \varphi A_\mu A_\mu \quad (6.7)$$

场的运动方程

$$\begin{cases} (\partial_\mu - ieA_\mu)^2 \varphi = m^2 \varphi \\ (\partial_\mu + ieA_\mu)^2 \varphi^* = m^2 \varphi^* \end{cases} \quad \square A_\mu = -ie[(\partial_\mu \varphi^*)\varphi - \varphi^*(\partial_\mu \varphi)] + 2e\varphi^* \varphi A_\mu = -j_\mu \quad (6.8)$$

流守恒方程

$$\partial_\mu j_\mu = 0 \rightarrow \square(\partial_\mu A_\mu) = 0$$

$$\mathcal{L}_I \neq j_\mu A_\mu \quad \mathcal{L}_I = j_\mu A_\mu + e^2 \varphi^* \varphi A_\mu A_\mu$$

量子化后

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}^\dagger - e\varphi^\dagger A_4$$

$$\pi^\dagger = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^\dagger} = \dot{\varphi} + e\varphi A_4$$

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = \dot{A}_\mu$$

对易关系

$$[\varphi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$[\varphi^\dagger(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{x}', t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$[A_\mu(\mathbf{x}, t), \pi_\nu(\mathbf{x}', t)] = i\delta_{\mu\nu}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

拉氏量密度

$$\mathcal{L} = \pi\dot{\varphi} + \pi^\dagger\dot{\varphi}^\dagger + \pi_\mu\dot{A}_\mu - \mathcal{L} = \mathcal{H}_{KG} + \mathcal{H}_{e.m.} + \mathcal{H}_I$$

$$\mathcal{H}_{KG} = \pi^\dagger\pi + \nabla\varphi^\dagger \cdot \nabla\varphi + m^2\varphi^\dagger\varphi$$

$$\mathcal{H}_{e.m.} = \frac{1}{2}(\pi_\mu\pi_\mu + \nabla A_\mu \cdot \nabla A_\mu)$$

$$\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I - e^2\varphi^\dagger\varphi A_0^2$$

§6.1.3 电磁相互作用的规范不变性

Dirac 场的拉氏量密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi + ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$$

$$= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \bar{\psi}(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi$$

规范不变性 $A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{\partial\Lambda}{\partial x_\mu}$ ，这是一个定域规范变换。

$$\psi(x) \rightarrow e^{ie\Lambda(x)}\psi(x)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}e^{-ie\Lambda(x)}$$

我们有

$$(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi \rightarrow e^{ie\Lambda}(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi \quad \text{协变微商}$$

导致

$$\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi \rightarrow \bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi$$

$$F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

标量场

$$\mathcal{L} = -(\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi^\dagger(\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi - m^2\varphi^\dagger\varphi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

而 $\mathcal{L}_I \sim e\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\psi$ 和 $\sigma_{\mu\nu} = 1/2i(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$ 。

所以 $F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu}$ ，而 $\mathcal{L}_I \rightarrow e\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\psi = \mathcal{L}_I$

§6.2 相互作用与分立对称变换 (P, C, T)

Lorentz 变换 $x \rightarrow \alpha x$ ，例如空间反射 $\alpha = -I$ ，其中 I 为单位矩阵。对应到场的变换为 $\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \Lambda\varphi(x)$ (对于矢量场来说 $\Lambda_{rs} = \alpha_{rs}$)。

对于 Lorentz 转动有

$$\mathcal{L}\left(\varphi(x), \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\mu}\right) = \mathcal{L}\left(\varphi'(x'), \frac{\partial\varphi'(x')}{\partial x'_\mu}\right)$$

由于 $\varphi(\alpha^{-1}x) \rightarrow \varphi'(x) = \Lambda(\alpha^{-1}x)\varphi(x)$ 。

有么正变换 $U\varphi(x)U^{-1} \equiv \varphi'(x) = \Lambda(\alpha)\varphi(\alpha^{-1}x)$ ，如果拉氏量满足

$$\begin{aligned} U\mathcal{L}(\varphi(x))U^{-1} &= \mathcal{L}(\varphi'(x)) = \mathcal{L}(\varphi(\alpha^{-1}x)) \\ U\mathcal{L}\left(\varphi(x), \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\mu}\right)U^{-1} &= \mathcal{L}\left(\varphi'(x), \frac{\partial\varphi'(x)}{\partial x_\mu}\right) = \mathcal{L}\left(\Lambda\varphi(\alpha^{-1}x), \frac{\partial(\Lambda\varphi(\alpha^{-1}x))}{\partial x_\mu}\right) \\ &= \mathcal{L}\left(\varphi(\alpha^{-1}x), \frac{\partial\varphi(\alpha^{-1}x)}{\partial(\alpha^{-1}x)_\mu}\right) \end{aligned}$$

则称拉氏量在 U 变换下不变。即

$$U\mathcal{L}(\varphi(x))U^{-1} = \mathcal{L}(U\varphi(x)U^{-1}) = \mathcal{L}(\varphi'(x)) = \mathcal{L}(\varphi(\alpha^{-1}x)) \quad (6.9)$$

§6.2.1 空间反射变换 |P

空间反射变换为 $\begin{cases} \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = -\mathbf{x} \\ t \rightarrow t' = t \end{cases}$ ，标量 (赝标量) 场 $\Lambda = \begin{cases} +1 & \text{标量} \\ -1 & \text{赝标量} \end{cases}$ 。

$$|P\varphi(\mathbf{x}, t)|P^{-1} = \pm\varphi(-\mathbf{x}, t)$$

$$\varphi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \pm\varphi(-\mathbf{x}, t)$$

由于 $\mathcal{L}$ 具有不变性

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial_\mu \varphi) - \frac{1}{2}m^2 \varphi^2$$

$$(\square - m^2)\varphi(x) = 0$$

动量表象

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\alpha(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \alpha^\dagger(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}})$$

空间反射变换后

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}\varphi(\mathbf{x}, t)|\mathbf{P}^{-1} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(|\mathbf{P}\alpha(\mathbf{k})|\mathbf{P}^{-1}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t} + |\mathbf{P}\alpha^\dagger|\mathbf{P}^{-1}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega t} \right) \\ &= \pm \varphi(-\mathbf{x}, t) \\ &= \pm \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(\alpha(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t} + \alpha^\dagger(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega t} \right) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}\alpha(\mathbf{k})|\mathbf{P}^{-1} &= \pm \alpha(-\mathbf{k}) \\ |\mathbf{P}\alpha^\dagger(\mathbf{k})|\mathbf{P}^{-1} &= \pm \alpha^\dagger(-\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (6.10)$$

假设 $|\mathbf{P}|0\rangle = |0\rangle$, 则

$$|\mathbf{P}\alpha^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle = |\mathbf{P}\alpha^\dagger(\mathbf{k})|\mathbf{P}|0\rangle = \pm \alpha^\dagger(-\mathbf{k})|0\rangle$$

$$P_\mu = \int d\mathbf{k} k_\mu \alpha^\dagger(\mathbf{k})\alpha(\mathbf{k}) \rightarrow \int d\mathbf{k} k_\mu \alpha^\dagger(-\mathbf{k})\alpha(-\mathbf{k})$$

其中 $k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ 。

$$\mathbf{P} \rightarrow -\mathbf{P}$$

$$H \rightarrow H$$

只改变动量。

Dirac 场: $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}, t \rightarrow t$, 则

$$\psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \psi'(-\mathbf{x}, t) = \gamma_4 \psi(\mathbf{x}, t)$$

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \Lambda \psi(x)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)\gamma_4$$

$$|\mathbf{P}\psi(\mathbf{x}, t)|\mathbf{P}^{-1} = \gamma_4 \psi(-\mathbf{x}, t)$$

$$|\mathbf{P}\bar{\psi}(\mathbf{x}, t)|\mathbf{P}^{-1} = \bar{\psi}(-\mathbf{x}, t)\gamma_4$$

对应的有

$$U\varphi(x)U^{-1} = \varphi'(x)$$

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi(x) = 0$$

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x'_\mu} + m \right) \psi'(x') = 0 \quad \psi'(x') = \gamma_4 \psi(x)$$

$$x'_\mu = \begin{cases} -\mathbf{x} & \mu = 1, 2, 3 \\ t & \mu = 0 \end{cases}$$

动量空间

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{p} \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{r=1,2} \left(C_r(\mathbf{p}) u(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} + d_r^\dagger(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} \right)$$

将空间反射算符作用上去以后

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}\psi(\mathbf{x}, t)|\mathbf{P}^{-1} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{p} \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{r=1,2} \left(|\mathbf{P}C_r(\mathbf{p})| \mathbf{P}^{-1} u(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} + |\mathbf{P}d_r^\dagger(\mathbf{p})| \mathbf{P}^{-1} v_r(\mathbf{p}) e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} \right) \\ &= \gamma_4 \psi(-\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{p} \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{r=1,2} \left(C_r(\mathbf{p}) \gamma_4 u(\mathbf{p}) e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + Et)} + d_r^\dagger(\mathbf{p}) \gamma_4 v_r(\mathbf{p}) e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} \right) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \gamma_4 u_r(\mathbf{p}) &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_r \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \varphi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_r \\ -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \varphi_r \end{pmatrix} = u_r(-\mathbf{p}) \\ \gamma_4 v_r(\mathbf{p}) &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \xi_r \\ \xi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \xi_r \\ -\xi_r \end{pmatrix} = -v_r(-\mathbf{p}) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} |\mathbf{P}C_r(\mathbf{p})|\mathbf{P}^{-1} &= C_r(-\mathbf{p}) \\ |\mathbf{P}d_r^\dagger(\mathbf{p})|\mathbf{P}^{-1} &= -d_r^\dagger(-\mathbf{p}) \end{cases} \quad |\mathbf{P}|0\rangle = |0\rangle$$

$$|\mathbf{P}\mathbf{p}|\mathbf{P}^{-1} = -\mathbf{p} \quad |\mathbf{P}H|\mathbf{P}^{-1} = H$$

电磁场 $A_\mu(\mathbf{x}, t)$, 则有 $|\mathbf{P}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)|\mathbf{P}^{-1} = -\mathbf{A}(-\mathbf{x}, t)$, $|\mathbf{P}A_0(\mathbf{x}, t)|\mathbf{P}^{-1} = A_0(-\mathbf{x}, t)$, 所以 $\mathcal{L} = -1/4 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \rightarrow -1/4 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ 。

§6.2.2 正反粒子与共轭变换 (Charge Conjugation)

自旋为零的复标量场:

$$\mathbf{C}\varphi(x)\mathbf{C}^{-1} = \varphi^\dagger(x)$$

$$\mathbf{C}\varphi^\dagger(x)\mathbf{C}^{-1} = \varphi(x)$$

拉氏量为

$$\mathcal{L} = -(\partial_\mu \varphi^\dagger)(\partial_\mu \varphi) - m^2 \varphi^\dagger \varphi$$

动量表象

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(a(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + b^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right) \\ \mathbf{C}\varphi(x)\mathbf{C}^{-1} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(\mathbf{C}a(\mathbf{k})\mathbf{C}^{-1} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + \mathbf{C}b^\dagger(\mathbf{k})\mathbf{C}^{-1} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right) \\ &= \varphi^\dagger(x) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(a^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + b(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right)$$

所以

$$\mathbf{C} a(\mathbf{k}) \mathbf{C}^{-1} = b(\mathbf{k}) \quad (6.11)$$

$$\mathbf{C} b^\dagger(\mathbf{k}) \mathbf{C}^{-1} = a^\dagger(\mathbf{k}) \quad (6.12)$$

另外

$$\mathbf{C}|0\rangle = |0\rangle$$

$$\mathbf{C} a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle = \mathbf{C} a^\dagger(\mathbf{k}) \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}|0\rangle = b^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$$

在这种变换下, 守恒流和守恒荷的变换为:

$$j_\mu = -i(\varphi^\dagger \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \varphi^\dagger) \rightarrow -j_\mu$$

$$Q = i \int d^3x (\varphi^\dagger \dot{\varphi} - \dot{\varphi} \varphi^\dagger) = \int d^3k (a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) - b^\dagger(\mathbf{k}) b(\mathbf{k})) \rightarrow -Q$$

补充:

“空间反射下 Dirac 场的一些最重要的物理量。

$$\psi \rightarrow \gamma_4 \psi \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} \gamma_4$$

$$\bar{\psi} \psi \rightarrow \bar{\psi} \psi \quad \text{标量}$$

$$\bar{\psi} \gamma_5 \psi \rightarrow -\bar{\psi} \gamma_5 \psi \quad \text{赝标量}$$

$$\bar{\psi} \gamma_\mu \psi \rightarrow \begin{cases} -\bar{\psi} \gamma_\mu \psi & \mu = 1, 2, 3 \\ \bar{\psi} \gamma_\mu \psi & \mu = 4 \end{cases} \quad \text{矢量}$$

$$\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi \rightarrow \begin{cases} +\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi & \mu = 1, 2, 3 \\ -\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi & \mu = 4 \end{cases} \quad \text{轴矢量}$$

对比在 Lorentz 变换下:

$$x \rightarrow x' = \alpha x$$

$$\begin{cases} \bar{\psi} \gamma_5 \psi \rightarrow \bar{\psi} \gamma_5 \psi \\ \bar{\psi} \psi \rightarrow \bar{\psi} \psi \end{cases} \quad \text{标量}$$

$$\begin{cases} \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \rightarrow \alpha_{\mu\nu} \bar{\psi} \gamma_\nu \psi \\ \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi \rightarrow \alpha_{\mu\nu} \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma_5 \psi \end{cases} \quad \text{矢量”}$$

Dirac 场:

拉氏量为

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi} \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi$$

运动方程为

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi = 0$$

共轭的方程为

$$\bar{\psi} \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) = 0$$

加入电磁场后

$$[\gamma_\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) + m] \psi = 0$$

共轭的方程为

$$\bar{\psi} [-\gamma_\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) + m] = 0$$

在共轭变换下 $\varphi \rightarrow \varphi^\dagger, \varphi^\dagger \rightarrow \varphi$; $\psi \rightarrow \psi^C = \mathbf{C} \tilde{\psi}$:

$$\mathbf{C} \varphi \mathbf{C}^{-1} = \varphi^C = \varphi^\dagger \quad \psi^C = \mathbf{C} \psi \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C} \tilde{\psi}$$

所以

$$[\gamma_\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) + m] \psi^C = 0$$

得到

$$[-\widetilde{\gamma}_\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) + m] \tilde{\psi} = 0$$

两端乘以 $\mathbf{C}$ 矩阵, 则有

$$[\mathbf{C}(-\widetilde{\gamma}_\mu) \mathbf{C}^{-1} (\partial_\mu + ieA_\mu) + m] \mathbf{C} \tilde{\psi} = 0$$

1. 如果 $\mathbf{C}(\widetilde{\gamma}_\mu) \mathbf{C}^{-1} = -\gamma_\mu$, 则会有

$$[\gamma_\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) + m] \psi^C = 0$$

2. 么正性 $\mathbf{C}^\dagger = \mathbf{C}^{-1}$

3. $\psi^C = \mathbf{C} \tilde{\psi}$ 应有 $\psi = \mathbf{C} \tilde{\psi}^C$, 所以 $\tilde{\mathbf{C}} = -\mathbf{C}$; $\bar{\psi}^C = -\tilde{\psi} \mathbf{C}^{-1}$ 。

证明: $\psi^C = \mathbf{C} \tilde{\psi}$, 从而 $(\psi^C)^\dagger = \tilde{\psi}^\dagger \mathbf{C}^\dagger = (\widetilde{\psi^\dagger \gamma_4})^\dagger \mathbf{C}^\dagger = \widetilde{\gamma_4^\dagger \psi} \mathbf{C}^\dagger = \tilde{\psi} \gamma_4 \mathbf{C}^\dagger$ 由于 $\mathbf{C}^\dagger = \mathbf{C}^{-1}$, 所以 $\tilde{\psi} \gamma_4 \mathbf{C}^\dagger = \tilde{\psi} \gamma_4 \mathbf{C}^{-1} = -\tilde{\psi} \mathbf{C}^{-1} \gamma_4$

如果要求 $\psi = \mathbf{C} \tilde{\psi}^C$, 则有 $\tilde{\mathbf{C}} = -\mathbf{C}$ 。

设 $\mathbf{C} = \eta \gamma_2 \gamma_4$, $|\eta| = 1$, 如果 $\eta = 1$, 则有

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

动量表象

$$\psi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{r=1,2} (C_r(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) e^{ipx} + d_r^\dagger(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) e^{-ipx})$$

共轭变换后

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \psi \mathbf{C}^{-1} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{r=1,2} (\mathbf{C} C_r(\mathbf{p}) \mathbf{C}^{-1} u_r(\mathbf{p}) e^{ipx} + \mathbf{C} d_r^\dagger(\mathbf{p}) \mathbf{C}^{-1} v_r(\mathbf{p}) e^{-ipx}) \\ &= \psi^C = \mathbf{C} \tilde{\psi} \end{aligned}$$

在 (6.13) 的情况下:

$$u = \mathbf{C} \tilde{v} \quad (6.14)$$

$$v = \mathbf{C} \tilde{u} \quad (6.15)$$

其中

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} \varphi_r \\ -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \varphi_r \end{pmatrix}$$

$$u = u^\dagger \gamma_4$$

$$\mathbf{C} = \gamma_2 \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$$

最后可以得到

$$\begin{cases} \mathbf{C} C_r(\mathbf{p}) \mathbf{C}^{-1} = d_r(\mathbf{p}) & \text{粒子} & \varphi_r & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \uparrow & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \downarrow \\ \mathbf{C} d_r(\mathbf{p}) \mathbf{C}^{-1} = C_r(\mathbf{p}) & \text{反粒子} & \varphi_r & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \downarrow & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \uparrow \end{cases} \quad (6.16)$$

拉氏量为:

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi} (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi$$

$$\begin{aligned} H &= \int d^3 p \sum_r E(\mathbf{p}) (C_r^\dagger(\mathbf{p}) C_r(\mathbf{p}) - d_r(\mathbf{p}) d_r^\dagger(\mathbf{p})) \\ &= \int d^3 p \sum_r E(\mathbf{p}) (C_r^\dagger(\mathbf{p}) C_r(\mathbf{p}) + d_r^\dagger(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p}) - 1) \end{aligned}$$

正规乘积形式为:

$$\mathcal{L} = -N [\bar{\psi} (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi]$$

$$H = N \int d^3 p \sum_r E(\mathbf{p}) (C_r^\dagger(\mathbf{p}) C_r(\mathbf{p}) - d_r(\mathbf{p}) d_r^\dagger(\mathbf{p}))$$

另外

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} [\bar{\psi} (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi + \bar{\psi}^C (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi^C] \\ &= -N [\bar{\psi} (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi] \end{aligned}$$

由于

$$\mathbf{C} \mathcal{L} \mathbf{C}^{-1} = \mathcal{L}$$

附: (+) 代表消灭算符、(-) 代表产生算符。则

$$\psi(x) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x)$$

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^{(+)}(x) + \bar{\psi}^{(-)}(x)$$

所以

$$N (\bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(x)) - \frac{1}{2} [\bar{\psi}_\alpha(x), \psi_\beta(x)]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left\{ \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x), \psi_\beta^{(+)}(x) \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \psi_\beta^{(-)}(x), \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x) \right\} \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3p \frac{m}{E} \sum_{r=1,2} (u_r^\beta(p) \bar{u}_r^\alpha(p) - v_r^\beta(p) \bar{v}_r^\alpha(p)) \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3p \frac{m}{E} \delta_{\beta\alpha}
\end{aligned}$$

其中

$$\sum_r (u_r^\beta(p) \bar{u}_r^\alpha(p) - v_r^\beta(p) \bar{v}_r^\alpha(p)) = \delta_{\alpha\beta}$$

其它的式子为

$$N (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) - \frac{1}{2} [\bar{\psi}, \gamma_\mu \psi] \sim \text{Tr}(\gamma_\mu) = 0$$

$$N (\bar{\psi} \gamma_5 \psi) - \frac{1}{2} [\bar{\psi}, \gamma_5 \psi] \sim \text{Tr}(\gamma_5) = 0$$

$$N (\bar{\psi} \psi) - \frac{1}{2} [\bar{\psi}, \psi] \sim \text{Tr}(1) \neq 0$$

附:

$$\bar{\psi} \gamma_5 \psi = \frac{1}{2} [\bar{\psi}, \gamma_5 \psi]$$

$$\bar{\psi} \gamma_\mu \psi - \frac{1}{2} [\bar{\psi}, \gamma_\mu \psi] = \delta_{\mu\nu} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} 2$$

拉氏量也可以写成为:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{2} [\bar{\psi} (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi + \bar{\psi}^C (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi^C] \\
&= -\frac{1}{2} \left[\bar{\psi} (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi + \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\tilde{\psi} \tilde{\gamma}_\mu \tilde{\psi}) - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_\mu} \tilde{\gamma}_\mu \tilde{\psi} - m \tilde{\psi} \tilde{\psi} \right] \\
\text{去掉散度项} &\Rightarrow -\frac{1}{2} \left[\bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_\mu} \tilde{\gamma}_\mu \tilde{\psi} + m \bar{\psi} \psi - m \tilde{\psi} \tilde{\psi} \right] \\
&= -\frac{1}{2} \left(\left[\bar{\psi}, \gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right] + m [\bar{\psi}, \psi] \right) \\
&= -\left\{ N \left[\bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right] + \frac{4}{2(2\pi)^3} \int d^3p \frac{m^2}{E} + N (m \bar{\psi} \psi) - \frac{4}{2(2\pi)^3} \int d^3p \frac{m^2}{E} \right\} \\
&= -N [\bar{\psi} (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi]
\end{aligned}$$

守恒流

$$\begin{aligned}
j_\mu &= \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi - \bar{\psi}^C \gamma_\mu \psi^C) \\
&= N (i \bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \\
&= \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi - \tilde{\psi} \tilde{\gamma}_\mu \tilde{\psi})
\end{aligned}$$

共轭变换下 $\mathbf{C} j_\mu \mathbf{C}^{-1} = -j_\mu$ 。

§6.2.3 相互作用的 PCT 变换性质

1. 电磁相互作用

守恒流 $j_\mu = iN(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)$ ，相互作用的拉氏量为 $\mathcal{L}_I = j_\mu A_\mu$ 。

|P 变换 ($x \rightarrow -x, t \rightarrow t$) 有

$$j \rightarrow -j, j_0 \rightarrow j_0, \text{ 即 } \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \rightarrow \begin{cases} -\bar{\psi}\gamma_\mu\psi & \mu = 1, 2, 3 \\ \bar{\psi}\gamma_\mu\psi & \mu = 4 \end{cases}.$$

$$A \rightarrow -A, A_0 \rightarrow A_0$$

C 变换

$\mathcal{L}_I = j_\mu A_\mu$ ，其中 $j_\mu \rightarrow -j_\mu, A_\mu \rightarrow -A_\mu$ 。光子的 C 宇称为 (-1) 。

2. $\pi - N$ 相互作用

相互作用的拉氏量为

$$\mathcal{L}_I = ig\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi \rightarrow ig\bar{N}\gamma_5\tau N \cdot \varphi$$

其中

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_p(x) \\ \psi_n(x) \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \quad \text{矢量}$$

在这中间 ψ 代表核子， φ 代表介子。对于同位旋为 1，则有三个同位旋分量 $\pm 1, 0$ 。

$$\varphi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2)$$

$$\varphi^0 = \varphi_3$$

|P 变换，则有 $\bar{\psi}\gamma_5\psi \rightarrow -\bar{\psi}\gamma_5\psi, \varphi \rightarrow -\varphi$ (π 介子)。

C 变换

$$\frac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma_5\psi + \bar{\psi}^C\gamma_5\psi) = N(\bar{\psi}\gamma_5\psi)$$

由于 $-\mathbf{C}^{-1}\gamma_\mu\mathbf{C} = \tilde{\gamma}_\mu, \mathbf{C}^{-1}\gamma_5\mathbf{C} = \tilde{\gamma}_5$ 所以 $\mathbf{C}[\bar{\psi}, \gamma_5\psi]\mathbf{C}^{-1} = [\bar{\psi}, \gamma_5\psi]$ 。

$\psi \rightarrow \mathbf{C}\tilde{\bar{\psi}}, \bar{\psi} \rightarrow -\tilde{\psi}\mathbf{C}^{-1}, A \rightarrow -A, \varphi \rightarrow \varphi$ 。

对于 $\pi^0, J^{PC} = 0^{-+}$ 。

3. 普适费米弱相互作用

如四费米子相互作用

$$n \rightarrow p + e\bar{\nu}_e \quad \beta \text{ 衰变}$$

$$\mu^- + p \rightarrow n + \nu_\mu \quad \mu \text{ 俘获}$$

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \quad (\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e, \mu^+ \rightarrow \nu_\mu, \pi \sim q\bar{q})$$

Fermi, 1934 年

$$C_i \bar{\psi} \Gamma^{(i)} \psi \bar{\psi} \Gamma^{(i)} \psi + h.c.$$

$$\Gamma^{(i)} = 1, \gamma_\mu, \gamma_5, \gamma_\mu \gamma_5, \sigma_{\mu\nu}$$

Lea-Yang, 1956 年

$$\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{\psi}\gamma_{\mu}(1+\gamma_5)\psi\bar{\psi}\gamma_{\mu}(1+\gamma_5)\psi + h.c.$$

其中 $G = 1.02 \times 10^{-1}/m_N^2$, $V-A$ 相互作用。

|P 变换下,

$$\bar{\psi}\gamma\psi \rightarrow -\bar{\psi}\gamma\psi \quad \bar{\psi}\gamma\gamma_5\psi \rightarrow \bar{\psi}\gamma\gamma_5\psi$$

$$\bar{\psi}\gamma_4\psi \rightarrow \bar{\psi}\gamma_4\psi \quad \bar{\psi}\gamma_4\gamma_5\psi \rightarrow -\bar{\psi}\gamma_4\gamma_5\psi$$

CPT 定理: 如果相互作用的哈密顿量满足 Lorentz 不变性和厄米性, 且均遵循正确的自旋统计关系, 则理论在 *CPT* 联合变换下保持不变。

第七章 散射矩阵和微扰法

§7.1 相互作用表象

不同的表象通过么正变换相联系，物理观察量（矩阵元）相同。其中 H 代表海森堡 (Heisenberg) 表象、S 代表薛定谔 (Schrödinger) 表象、I 代表相互作用 (Interaction) 表象。算符在不同的表象之间的均值相等：

$${}^H \langle b | O^H(t) | a \rangle^H = {}^S \langle b, t | O^S | a, t \rangle^S = {}^I \langle b, t | O^I(t) | a, t \rangle^I$$

H 经典过渡 $q(t), p(t) \rightarrow \varphi(x, t), \pi(x, t)$ ，则有

$$\dot{\varphi}^H(x) = -i [\varphi^H(x), H]$$

$$\dot{\pi}^H(x) = -i [\pi^H(x), H]$$

$$\dot{O}^H(x) = -i [O^H(x), H]$$

其中 $\dot{H} = 0$, $H = H_0 + H_I$ (在 H, S 表象中相同，不随时间变换)。另外

$$\varphi^H(x, t) = e^{iH_0 t} \varphi^H(x, 0) e^{-iH_0 t}$$

$$\pi^H(x, t) = e^{iH_0 t} \pi^H(x, 0) e^{-iH_0 t}$$

$$O^H(x, t) = e^{iH_0 t} O^H(x, 0) e^{-iH_0 t}$$

S 则有

$$O^S(x) = O^H(x, 0) = e^{-iH_0 t} O^H(x) e^{iH_0 t}$$

$$|a, t \rangle^S = e^{-iH_0 t} |a \rangle^H$$

I 哈密顿量可以写成

$$H = H_0 + H_I$$

所以算符之间的变换为

$$\begin{aligned} O^I(x, t) &= e^{iH_0^S t} O^S(x) e^{-iH_0^S t} \\ &= e^{iH_0^S t} e^{-iH_0 t} O^H(x, t) e^{iH_0 t} e^{-iH_0^S t} \end{aligned}$$

态之间的变换：

$$|a, t \rangle^I = e^{iH_0^S t} |a, t \rangle^S = e^{iH_0^S t} e^{-iH_0 t} |a \rangle$$

$$(0.1) \quad H_0^I(t) = H_0^S \Rightarrow \dot{H}_0^S(t) = 0$$

$$(0.2) \quad \dot{O}^I(x, t) = i [H_0^I, O^I(x, t)], \text{ 算符的运动方程}$$

$$(0.3) \quad i\partial_t |a, t \rangle^I = H_0^I |a, t \rangle^I \text{ 其中，上标代表相互作用表象，下标代表相互作用。}$$

证明：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |a, t \rangle^I &= iH_0^S e^{iH_0^S t} |a, t \rangle^S - e^{iH_0^S t} iH_0^S |a, t \rangle^S & \left(\frac{\partial}{\partial t} |a, t \rangle^S = -iH_0^S |a, t \rangle^S \right) \\ &= iH_0^S |a, t \rangle^I - i e^{iH_0^S t} H_0^S e^{-iH_0^S t} |a, t \rangle^I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= iH_0^S |a, t>^I - iH^I |a, t>^I \\
&= -iH_I^I |a, t>^I \quad (H^I - H_0^I = H_I^I)
\end{aligned}$$

由于 (1) $O^I(x, t)$ 的运动方程为 $H_0^I = H_0^S$ 决定, (2) 等时对易关系在么正变换下不变 $\Rightarrow (\varphi_A^I(x, t), \pi_B^I(x, t) = i\delta_{AB}\delta^3(x - x'))$; 所以相互作用表象的算符满足的运动方程和等时对易关系都与自由场的情形完全相同。算符 (存在相互作用时) 的表达式与自由场 (无相互作用) 情形下的表达式完全相同。

$$\begin{aligned}
\varphi^I(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\omega t} \right) \\
\varphi^H(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(a(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a^\dagger(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right)
\end{aligned}$$

§7.2 S 矩阵和微扰法

以下略去相互作用表象的标志。

$$|a, t> \equiv u(t, t_0) |a, t_0>$$

其中 $u(t, t_0) = 1$, 满足的方程为:

$$i \frac{\partial}{\partial t} u(t, t_0) = H_I(t) u(t, t_0) \quad \Leftarrow \quad i \frac{\partial}{\partial t} |a, t> = H_I(t) |a, t> \quad (7.1)$$

伴随形式 $(H_I^\dagger = H_I)$ 为

$$-i \frac{\partial}{\partial t} u^\dagger(t, t_0) = u^\dagger(t, t_0) H_I(t)$$

所以, 由上面两个方程可以推出

$$\frac{\partial}{\partial t} (u(t, t_0) u^\dagger(t, t_0)) = 0$$

从而可以得出

$$u(t, t_0) u^\dagger(t, t_0) = \text{常数} = 1 \quad (7.2)$$

所以 $u(t, t_0)$ 为么正算符。从上面的结论可以看出 u 的逆一定存在, 因为 $u(t, t_0) u(t_0, t) = 1$ 所以 $u(t, t_0)^{-1} = u(t_0, t)$ 。另外

$$u(t, 0) = e^{iH_0^S t} e^{-iH^S t} \quad \text{由于 } |a, t>^I = e^{iH_0^S t} e^{-iH^S t} |a> \quad (7.3)$$

所以

$$\begin{aligned}
u(t, t_0) &= u(t, 0) u(0, t_0) = u(t, 0) u^{-1}(t_0, 0) \\
&= e^{iH_0^S t} e^{-iH^S (t-t_0)} e^{-iH_0^S t_0}
\end{aligned} \quad (7.4)$$

S 矩阵为

$$S \equiv \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t_0 \rightarrow -\infty}} u(t, t_0) = u(+\infty, -\infty) \quad (7.5)$$

跃迁矩阵为:

$$\langle f|S|i\rangle = S_{fi} \quad (7.6)$$

$t = -\infty$ 时, 初态 $|i\rangle$ 经过时间演化到 $t = +\infty$ 这个态, 演变为 $S|i\rangle$ 。它在某一给定末态 $|f\rangle$ 上的投影为 $\langle f|S|i\rangle$ 。

u 算符的微扰展开

$$\begin{aligned} u(t, t_0) &= 1 - i \int_{t_0}^t H_I(t_1) u(t_1, t_0) dt_1 \\ &= 1 - i \int_{t_0}^t H_I(t_1) dt_1 + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \cdots \\ &\quad + (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_n) + \cdots \end{aligned} \quad (7.7)$$

其中

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) \quad (t_1 > t_2) \\ \Rightarrow &\int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H_I(t_2) H_I(t_1) \quad (t_1 < t_2) \end{aligned}$$

所以 (7.7) 式中第二项为

$$\begin{aligned} &(-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) \\ &= (-i)^2 \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) \\ &= \frac{1}{2} (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T(H_I(t_1) H_I(t_2)) \\ &= \frac{1}{2} (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_2) H_I(t_1) \end{aligned}$$

其中

$$T(H_I(t_1) H_I(t_2)) = \begin{cases} H_I(t_1) H_I(t_2) & t_1 > t_2 \\ H_I(t_2) H_I(t_1) & t_1 < t_2 \end{cases} \quad (7.8)$$

所以 (7.7) 式为

$$\begin{aligned} u(t, t_0) &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t H_I(t_1) dt_1 + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T(H_I(t_1) H_I(t_2)) \\ &\quad + \cdots + \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T(H_I(t_1) \cdots H_I(t_n)) + \cdots \end{aligned} \quad (7.9)$$

或者

$$u(t, t_0) = T \left(\exp \left[-i \int_{t_0}^t H_I(t') dt' \right] \right) \quad (7.10)$$

从而有

$$S = u(+\infty, -\infty) = T \exp \left[-i \int H_I(x) d^4x \right] \quad (7.11)$$

S 为 Lorentz 不变量, $T(H_I(t_1) \cdots H_I(t_n))$ 为 Lorentz 不变量。

其中 T 乘积定义为

$$T(AB) \equiv \frac{1}{2}\{A, B\}_+ + \frac{1}{2}\epsilon(t_A - t_B)[A, B]$$

注意: 在类空区, ϵ 不协变, 但是此时 $[A, B] = 0$ 。

A 和 B 可以是单个玻色场算符, 也可以是玻色场算符合双线性费米场算符组成的复合算符。

$$\epsilon(t_A - t_B) = \begin{cases} 1 & t_A > t_B \\ -1 & t_A < t_B \end{cases}$$

算符 $O(x) = \varphi_a(x)\varphi_b(x)$, 微观因果性要求 $[O(x), O(x')] = 0, \text{ if } (x - x')^2 > 0$ 类空。

两个可能性

1. $[\varphi_a(x), \varphi_b(x')] = 0, (x - x')^2 > 0$

整数自旋的 Klein-Gordon 场:

$$[\alpha, \alpha^\dagger] = 1 \rightarrow [\varphi_a(x), \varphi_b(x')] = i\Delta(x - x') = 0, (x - x')^2 > 0$$

$$\{\alpha, \alpha^\dagger\} = 1 \rightarrow \{\varphi_a(x), \varphi_b(x')\} = i(\Delta^{(+)}(x - x') - \Delta^{(-)}(x - x')) = \Delta_1(x - x') \neq 0, (x - x')^2 > 0$$

2. $\{\varphi_a(x), \varphi_b(x')\} = 0, (x - x')^2 > 0$

Dirac 场 (半奇数自旋)

$$\{\alpha, \alpha^\dagger\} = 1 \rightarrow \{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')\} = -i(\gamma\partial - m)_{\alpha\beta}\Delta(x - x') = 0$$

$$[\alpha, \alpha^\dagger] = 1 \rightarrow [\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')] = -S_1(x - x')_{\alpha\beta} \neq 0$$

所以 $[O(x), O(x')] = 0, (x - x')^2 > 0$ 。

整数自旋场给出 $[\alpha, \alpha^\dagger] = 1$, 玻色统计

半奇数自旋给出 $\{\alpha, \alpha^\dagger\} = 1$, 费米统计

§7.3 T 乘积分解为 N 乘积, Wick 定理

散射矩阵的投影 $\langle f|S|i\rangle = S_{fi}$, 其中初态为 $|i\rangle = a^\dagger b^\dagger \cdots d^\dagger|0\rangle$, 末态为 $|f\rangle = e^\dagger f^\dagger \cdots g^\dagger|0\rangle$, 所以

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle f|S|i\rangle \\ &= \langle 0|g \cdots f e S a^\dagger b^\dagger \cdots d^\dagger|0\rangle \end{aligned}$$

只有当 S 中含有 $ab \cdots d$ 以及 $e^\dagger f^\dagger \cdots g^\dagger$, 投影才不为零。式中的算符可能满足对易关系也可能满足反对易关系。

定义 N 乘积

$$N(UVW \cdots Z) = \delta_p U'V'W' \cdots Z' \quad (7.12)$$

式中 $U'V'W' \cdots Z'$ 按照一定的顺序排列, 其中所有的消灭算符都排在所有产生算符的左边, 如果从 $UVW \cdots Z$ 调换到 $U'V'W' \cdots Z'$ 时, 费米子交换偶数次, 则 $\delta_p = 1$, 否则 $\delta_p = -1$ 。

例如

$$N(\psi(x)\bar{\psi}(y)) = \psi^{(+)}(x)\bar{\psi}^{(+)}(y) - \bar{\psi}^{(-)}(y)\psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x)\bar{\psi}^{(+)}(y) + \psi^{(-)}(x)\bar{\psi}^{(-)}(y)$$

$$N(\psi(x)\bar{\psi}(y)) = -N(\bar{\psi}(y)\psi(x)) \quad (7.13)$$

$$N[\psi(x)\psi(y)] = -N(\psi(y)\psi(x)) \quad (7.14)$$

$$N[\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)] = -N(\bar{\psi}(y)\bar{\psi}(x)) \quad (7.15)$$

性质：正规乘积内部，所有的费米子算符都可以反对易，所有的玻色子都可以对易。

$$N(ABC \cdots D) = \delta_p N(A'B'C' \cdots D')$$

$$T(ABC \cdots D) = \delta_T T(A'B'C' \cdots D')$$

定义 $T(ABC \cdots D) = \delta_T A'B'C' \cdots D'$ ，对于费米子很显然：

$$N(ABC \cdots XY \cdots D) = -N(ABC \cdots YX \cdots D)$$

§7.3.1 Wick 定理

1) 算符的收缩 (Contraction) 及有关定理

定义

$$\underline{\varphi_A(x_1)\varphi_B(x_2)} \equiv T(\varphi_A(x_1)\varphi_B(x_2)) - N(\varphi_A(x_1)\varphi_B(x_2)) \quad (7.16)$$

1. 算符的收缩等于 T 运算后在真空态的值

$$\underline{\varphi_A(x_1)\varphi_B(x_2)} = \langle 0|T \varphi_A(x_1)\varphi_B(x_2)|0 \rangle \quad (7.17)$$

证明：

$$T(\varphi_A(x_1)) = N(\varphi_A(x_1)) \quad (7.18)$$

右乘以 $\varphi_B(x_2)$ 假定 $t_1 > t_2$ ，则

$$T(\varphi_A(x_1))\varphi_B(x_2) = T(\varphi_A(x_1)\varphi_B(x_2))$$

$$\begin{aligned} N(\varphi_A(x_1))\varphi_B(x_2) &= N(\varphi_A(x_1))\varphi_B^{(+)}(x_2) + N(\varphi_A(x_1))\varphi_B^{(-)}(x_2) \\ &= N(\varphi_A(x_1)\varphi_B^{(+)}(x_2)) + N(\varphi_A^{(-)}(x_1)\varphi_B^{(-)}(x_2)) + \varphi_A^{(+)}(x_1)\varphi_B^{(-)}(x_2) \end{aligned}$$

其中

$$\varphi_A^{(+)}(x_1)\varphi_B^{(-)}(x_2) = \pm\varphi_B^{(-)}(x_2)\varphi_A^{(+)}(x_1) + [\varphi_A^{(+)}(x_1), \varphi_B^{(-)}(x_2)]_{\mp} \quad \text{分别对应玻色子和费米子}$$

$$\varphi_A^{(+)}(x_1)\varphi_B^{(-)}(x_2) = N(\varphi_A^{(+)}(x_1)\varphi_B^{(-)}(x_2)) + [\varphi_A^{(+)}(x_1), \varphi_B^{(-)}(x_2)]_{\mp}$$

C.number 为

$$\begin{aligned} [\varphi_A^{(+)}(x_1), \varphi_B^{(-)}(x_2)]_{\mp} &= \langle 0|[\varphi_A^{(+)}(x_1), \varphi_B^{(-)}(x_2)]_{\mp}|0 \rangle = \langle 0|\varphi_A^{(+)}(x_1)\varphi_B^{(-)}(x_2)|0 \rangle \\ &= \langle 0|\varphi_A(x_1)\varphi_B(x_2)|0 \rangle \end{aligned}$$

$$\text{if } t_1 > t_2 = \langle 0|T \varphi_A(x_1)\varphi_B(x_2)|0 \rangle$$

所以当 $t_1 > t_2$ 时

$$T(\varphi_A(x_1)\varphi_B(x_2)) = N(\varphi_A(x_1)\varphi_B(x_2)) + \langle 0|T(\varphi_A(x_1)\varphi_B(x_2))|0 \rangle \quad (7.19)$$

当 $t_1 < t_2$ 时利用 $T(\varphi_A \varphi_B) = \delta_p T(\varphi_B \varphi_A)$, $N(\varphi_A \varphi_B) = -N(\varphi_B \varphi_A)$ 。

2. 不同场之间的收缩等于零

$$\underline{A_\mu(x)\psi(y)} = 0 \Leftrightarrow [A_\mu(x), \psi(y)] = 0$$

3. 消灭算符之间、产生算符之间的收缩为零

$$\underline{\psi(x)\psi(y)} = 0 \quad \underline{\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)} = 0$$

4. 关于收缩的一个预备定理

定义:

$$N(\underline{UVW \cdots YZ}) \equiv \delta_p \underline{VZN}(UW \cdots Y) \quad (7.20)$$

其中 $\delta_p = (-1)^n$, n 为将 V 和 Z 调到一起所交换的费米子算符的数目。同时, 由此出发可以定义多个收缩下的 N 算符:

$$N(\underline{UVW \cdots YZ}) \equiv \delta_p \underline{VZWYN}(U \cdots X) \quad (7.21)$$

定理: 如果算符 Z 的时间值比 $UV \cdots XY$ 都小, 则有

$$\begin{aligned} N(UV \cdots XY)Z &= N(UV \cdots XYZ) + N(\underline{UV \cdots XYZ}) + N(\underline{UV \cdots XYZ}) \\ &\quad + \cdots + N(UV \cdots \underline{XYZ}) \end{aligned} \quad (7.22)$$

首先只要证明 Z 是产生算符定理正确即可, 因为对于 Z 为消灭算符则有

$$\underline{UZ} = T(UZ) - N(UZ) = UZ - UZ = 0 \quad (7.23)$$

其次, 只要证明 $UV \cdots XY$ 是消灭算符成立就够了。

假设已经对消灭算符成立, 则有

$$\begin{aligned} N(UV \cdots XY)Z &= N(UV \cdots XYZ) + N(\underline{UV \cdots XYZ}) + N(\underline{UV \cdots XYZ}) \\ &\quad + \cdots + N(UV \cdots \underline{XYZ}) \end{aligned}$$

左边再乘上产生算符 P , 则

$$\begin{aligned} PN(UV \cdots XY)Z &= PN(UV \cdots XYZ) + PN(\underline{UV \cdots XYZ}) + PN(\underline{UV \cdots XYZ}) \\ &\quad + \cdots + PN(UV \cdots \underline{XYZ}) \end{aligned}$$

进一步推导有

$$N(PUV \cdots XY)Z = N(PUV \cdots XYZ) + N(\underline{PUV \cdots XYZ}) + N(\underline{PUV \cdots XYZ}) + \cdots$$

由于 P 是产生算符, 所以 $\underline{PZ} = 0$ 。

利用数学归纳法可以证明 $UV \cdots XY$ 是消灭算符 Z 是产生算符定理是正确的。

当 $n = 1$ 时, 有

$$N(Y)Z = YZ = T(YZ) = N(YZ) + \underline{YZ}$$

假设已对 n 成立, 则要证明对于 $n + 1$ 也成立。

首先我们有

$$N(UV \cdots XY)Z = N(UV \cdots XYZ) + N(\underline{UV \cdots XYZ}) + N(\underline{UV \cdots XYZ})$$

$$+ \cdots + N(UV \cdots \underline{XYZ})$$

两边左乘消灭算符 R

$$\begin{aligned} RN(UV \cdots XY)Z &= RN(UV \cdots XYZ) + RN(\underline{UV \cdots XYZ}) + RN(\underline{UV \cdots XYZ}) \\ &\quad + \cdots + RN(\underline{UV \cdots XYZ}) \end{aligned}$$

对上式右边的第一项 $RN(UV \cdots XYZ) \rightarrow$

$$RZUV \cdots XY \delta_p = N(R \cdots Z) + \underline{RZ}N \cdots$$

所以有

$$RN(UV \cdots XYZ) = N(RUV \cdots XYZ) + N(\underline{RUV \cdots XYZ})$$

故定理对于 $n+1$ 也成立

5. Wick 定理 1

$$\begin{aligned} T(UV \cdots XYZ) &= N(UV \cdots XYZ) \quad \text{无收缩项} \\ &\quad + N(\underline{UV \cdots XYZ}) + \cdots + N(\underline{UV \cdots XYZ}) \quad \text{一次收缩项} \\ &\quad + N(\underline{UV \cdots XYZ}) + \cdots \quad \text{两次收缩项} \\ &\quad + \cdots \\ &\quad N(\underline{\underline{UVW \cdots XYZ}}) \quad \text{全部收缩} \end{aligned} \quad (7.24)$$

证明: 定理对于 $n=2$ 是成立的。

假设对于 n 已经成立, 右乘以算符 R (其时间小于所有其它算符的时间) 有

$$\begin{aligned} T(UV \cdots XYZ)R &= T(UV \cdots XYZR) \\ N(UV \cdots XYZ)R &= N(UV \cdots XYZR) + N(\underline{UV \cdots XYZR}) + \cdots \\ N(\underline{UV \cdots XYZ})R &= \delta_p \underline{UV}N(W \cdots XYZ)R \\ &= N(\underline{UV \cdots XYZR}) + N(\underline{\underline{UVW \cdots XYZR}}) + \cdots \end{aligned}$$

如此下去, 可以证明定理对于 $n+1$ 也成立。

6. Wick 定理 2

如果 T 乘积中含有 N 乘积 (称为混合乘积), 则上述展开仍然成立, 但需将每一个 N 乘积内部各算符之间的收缩略去。如

$$T\left(N(\bar{\psi}(x_n)\hat{A}\psi(x_n)) \cdots N(\bar{\psi}(x_1)\hat{A}\psi(x_1))\right)$$

其中 $\hat{A} = \gamma_\mu A_\mu$ 。

§7.4 费曼传播子和费曼图

§7.4.1 Feynman Propagator

算符收缩的定义

$$\begin{aligned}
\underline{\varphi_A \varphi_B} &\equiv T(\varphi_A(x_1)\varphi_B(x_2)) - N(\varphi_A(x_1)\varphi_B(x_2)) \\
&= \langle 0|T\varphi_A(x_1)\varphi_B(x_2)|0\rangle
\end{aligned} \tag{7.25}$$

实标量场: $\langle 0|T\varphi_A(x_1)\varphi_B(x_2)|0\rangle = \Delta_F(x_1 - x_2)$

复标量场: $\langle 0|T\varphi(x_1)\varphi^\dagger(x_2)|0\rangle = \Delta_F(x_1 - x_2)$

电磁场: $\langle 0|T A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)|0\rangle = \delta_{\mu\nu}D_F(x_1 - x_2)$

Dirac 场: $\langle 0|T\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)|0\rangle = S_F(x_1 - x_2)_{\alpha\beta}$

1. 实标量场

假定 $x_{10} > x_{20}$

$$\begin{aligned}
T\varphi(x_1)\varphi(x_2) &= \varphi(x_1)\varphi(x_2) \\
&= \varphi^{(+)}(x_1)\varphi^{(+)}(x_2) + \varphi^{(-)}(x_1)\varphi^{(-)}(x_2) + \varphi^{(-)}(x_1)\varphi^{(+)}(x_2) + \varphi^{(+)}(x_1)\varphi^{(-)}(x_2) \\
N\varphi(x_1)\varphi(x_2) &= \varphi^{(+)}(x_1)\varphi^{(+)}(x_2) + \varphi^{(-)}(x_1)\varphi^{(-)}(x_2) + \varphi^{(-)}(x_1)\varphi^{(+)}(x_2) + \varphi^{(-)}(x_2)\varphi^{(+)}(x_1)
\end{aligned}$$

所以

$$\Delta_F(x_1 - x_2) = \varphi^{(+)}(x_1)\varphi^{(-)}(x_2) - \varphi^{(-)}(x_2)\varphi^{(+)}(x_1) \tag{7.26}$$

动量表象

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega}} (\alpha(\mathbf{k})e^{ikx} + \alpha^\dagger(\mathbf{k})e^{-ikx})$$

所以可以得到

$$\begin{aligned}
\Delta_F(x_1 - x_2) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' \frac{1}{\sqrt{4\omega\omega'}} e^{ikx_1 - ik'x_2} [\alpha(\mathbf{k}), \alpha^\dagger(\mathbf{k}')] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{1}{2\omega} e^{ik(x_1 - x_2)}
\end{aligned} \tag{7.27}$$

如果 $x_{10} < x_{20}$, 则只需 $x_1 \leftrightarrow x_2$ 即可。此时

$$\Delta_F(x_1 - x_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{1}{2\omega} e^{-ik(x_1 - x_2)} \tag{7.28}$$

引入 θ 函数,

$$\theta = \begin{cases} 1 & x_0 > 0 \\ 0 & x_0 < 0 \end{cases} \tag{7.29}$$

相应的函数定义则为

$$\Delta_F(x) \equiv \theta(x_0)i\Delta^{(+)}(x) - \theta(-x_0)i\Delta^{(-)}(x) \tag{7.30}$$

从而有

$$\begin{aligned}
[\varphi(x_1), \varphi(x_2)] &= i\Delta(x_1 - x_2) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{2\omega} (e^{ik(x_1 - x_2)} - e^{-ik(x_1 - x_2)}) \\
&\equiv i\Delta^{(+)}(x_1 - x_2) + i\Delta^{(-)}(x_1 - x_2)
\end{aligned} \tag{7.31}$$

显式协变: $d\mathbf{k} \rightarrow d^4k = dk_0 dk$, 所以

$$\Delta_F(x) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_{C_f} d^4k \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2} \quad (7.32)$$

积分路径如图 7.1(I) 所示。

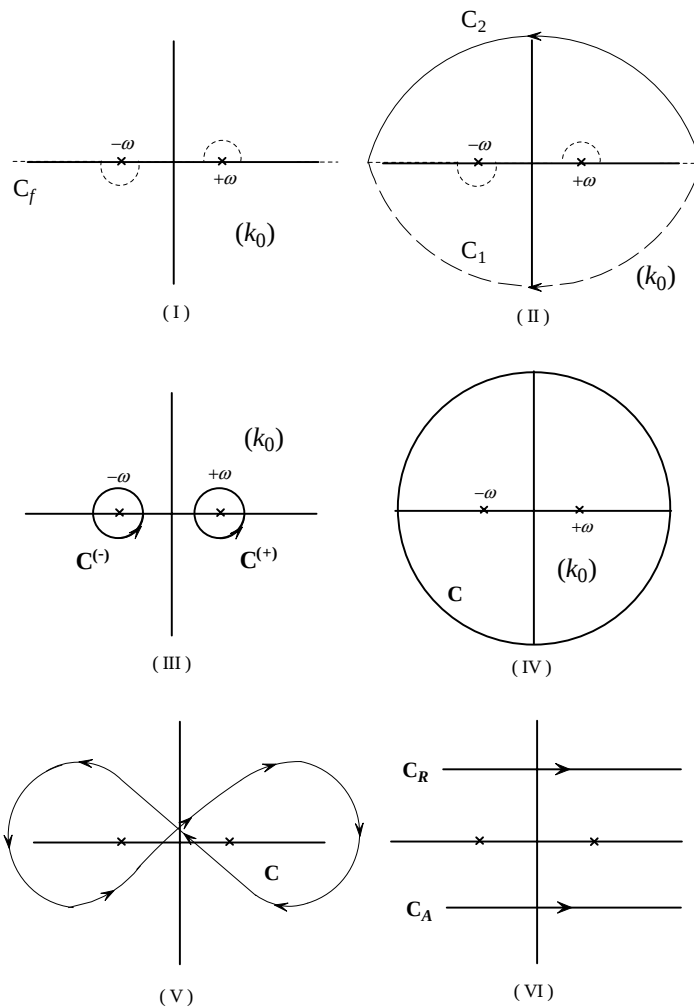


图 7.1: 积分路径图

证明: 由于

$$\frac{1}{k^2 + m^2} = \frac{-1}{k_0^2 - \omega^2} = \frac{A \# -1}{(k_0 + \omega)(k_0 - \omega)}$$

$$e^{ikx} = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - ik_0 x_0}$$

当 $x_0 > 0$ 时, 被积函数中因子 $\exp[-ik_0 x_0]$ 使得积分在下半圆 (大) 区域如图 7.1(II), 即只有 $k_0 = \omega$ 的留数贡献:

$$\int dk_0 \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - ik_0 x_0}}{k^2 + m^2} = 2\pi i \frac{1}{2\omega} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega x_0}$$

当 $x_0 < 0$ 时, 被积函数中因子 $\exp[-ik_0 x_0]$ 使得积分在上半圆 (大) 区域如图 7.1(II), 即只有 $k_0 = -\omega$ 的留数贡献:

$$\int dk_0 \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - ik_0 x_0}}{k^2 + m^2} = 2\pi \frac{1}{2\omega} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\omega x_0}$$

对于标量场

$$\Delta(x) = \langle 0|T \varphi(x_1)\varphi(x_2)|0 \rangle = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_{C_f} d^4k \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2} \quad (7.33)$$

相应的

$$\frac{-i}{k^2 + m^2} \rightarrow \frac{-i}{k^2 + m^2 - i\epsilon} \quad (m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon) \quad (7.34)$$

所以

$$\Delta_f(x) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2 - i\epsilon} \quad (7.35)$$

附：其它积分函数

$$\Delta^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C^{(\pm)}} d^4k \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2} \quad (7.36)$$

积分路径见图 7.1(III)。

$$\Delta(x) = \Delta^{(+)}(x) + \Delta^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_C d^4k \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2} \quad (7.37)$$

积分路径见图 7.1(IV)。

$$\Delta_1(x) = i\Delta^{(+)}(x) - i\Delta^{(-)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C_1} d^4k \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2} \quad (7.38)$$

积分路径见图 7.1(V)。

2. 电磁场

$$(\square - m^2) \Delta_f(x) = i \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ikx} = i\delta^4(x) \quad (7.39)$$

光子的传播函数：

$$\langle 0|T A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)|0 \rangle = \delta_{\mu\nu} D_F(x_1 - x_2)$$

其中

$$D_F(x) = \Delta_F(x)|_{m=0} = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{ikx}}{k^2 - i\epsilon} \quad (7.40)$$

积分路径见图 7.1(VI)。注意极化条件

$$\sum_{\lambda=1,2,3,4} e_\mu^\lambda(k) e_\nu^\lambda(k) = \delta_{\mu\nu}$$

C_R 为推迟, C_A 为超前。

光子的动量表象 ($\square A_\mu(x) = 0$) 为

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{2\omega} \sum_{\lambda=1,2,3,4} e_\mu^\lambda(k) [\alpha_\lambda(k) e^{ikx} + \bar{\alpha}_\lambda(k) e^{-ikx}]$$

注意到 $A_4^\dagger = -A_4$, $\bar{\alpha}_4 = -\alpha_4^\dagger$

相应的对易关系为

$$[\alpha_\lambda(\mathbf{k}), \bar{\alpha}_{\lambda'}(\mathbf{k}')] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

库仑规范下的极化条件为

$$\sum_{\lambda=1,2} e_i^\lambda e_j^\lambda(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}$$

3. Dirac 场的传播子

$$S_f(x_1 - x_2) = \langle 0 | T \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle \quad (7.41)$$

分两种情况来讨论:

(3.1) $x_{10} > x_{20}$, 则有

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle &= \left\{ \psi^{(+)}(x_1), \bar{\psi}^{(-)}(x_2) \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{r,r'} \int d\mathbf{p} \int d\mathbf{p}' \sqrt{\frac{m^2}{EE'}} u_r(p) \bar{u}_{r'}(p') e^{ipx_1 - ip'x_2} \left\{ C_r(\mathbf{p}), C_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_r \int d\mathbf{p} \frac{m}{E} u_r(p) \bar{u}_r(p) e^{ip(x_1 - x_2)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \left(\frac{-i\hat{\mathbf{p}} + m}{2E} \right) e^{ip(x_1 - x_2)} \\ &= - \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_{1\mu}} - m \right) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{2E} e^{ip(x_1 - x_2)} \end{aligned}$$

附: 投影算符

$$\sum_r u_r^\alpha(p) \bar{u}_r^\beta(p) = \left(\frac{-i\hat{\mathbf{p}} + m}{2E} \right)_{\alpha\beta} \quad (7.42)$$

(3.2) $x_{10} < x_{20}$, 则有

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle &= - \langle 0 | \bar{\psi}(x_2) \psi(x_1) | 0 \rangle \\ &= - \left\{ \bar{\psi}^{(+)}(x_2), \psi^{(-)}(x_1) \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_r \int d\mathbf{p} \frac{m}{E} (-1) v_r(p) \bar{v}_r(p) e^{-ip(x_1 - x_2)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \frac{i\hat{\mathbf{p}} + m}{2E} e^{-ip(x_1 - x_2)} \\ &= -(\hat{\partial}_1 - m) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{2E} e^{-ip(x_1 - x_2)} \end{aligned}$$

附:

$$\sum_r (u_r(p) \bar{u}_r(p) - v_r(p) \bar{v}_r(p)) = I \quad 4 \times 4 \text{ 单位矩阵} \quad (7.43)$$

从而有

$$\sum_r -v_r \bar{v}_r = \frac{i\hat{\mathbf{p}} + m}{2E}$$

最终传播子形式为

$$\begin{aligned}
\langle 0|T \psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle &= -(\hat{\partial} - m)\Delta_f(x) \\
&= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{m - i\hat{p}}{p^2 + m^2 - i\epsilon} e^{ipx} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{-i}{i\hat{p} + m} e^{ip(x_1 - x_2)}
\end{aligned} \tag{7.44}$$

或者

$$\begin{aligned}
\langle 0|T \psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle &= \theta(x_{10} - x_{20})(-\hat{\partial} - m) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \frac{1}{2E} e^{ip(x_1 - x_2)} \\
&\quad + \theta(x_{20} - x_{10})(-\hat{\partial} - m) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \frac{1}{2E} e^{-ip(x_1 - x_2)}
\end{aligned} \tag{7.45}$$

注意 $\partial/\partial x_0 \theta(x_0) = \delta(x_0)$, $\delta(x_{10} - x_{20})\Delta(x_1 - x_2) = 0$ (因为类空时 $x^2 > 0$, 有 $\Delta(x) = 0$)。

§7.4.2 S 矩阵的微扰展开和费曼图

S 矩阵的微扰展开形式为

$$S = u(+\infty, -\infty) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n T [H_I(x_1) \cdots H_I(x_n)] \tag{7.46}$$

$$S_{fi} = \langle f|S|i\rangle \tag{7.47}$$

对于 QED 来说,

$$H_I(x) = -ieN \bar{\psi}(x)\gamma_\mu \psi(x)A_\mu(x)$$

S 矩阵的一阶微扰项为

$$\begin{aligned}
S^{(1)} &= (-i) \int d^4x H_I(x) = (-e) \int d^4x N [\bar{\psi}(x)\gamma_\mu \psi(x)A_\mu(x)] \\
&= (-e) \int d^4x N \left\{ \left(\bar{\psi}^{(+)}(x) + \bar{\psi}^{(-)}(x) \right) \left(\hat{A}^{(+)}(x) + \hat{A}^{(-)}(x) \right) \left(\psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x) \right) \right\} \\
&= (-e) \int d^4x \left[\bar{\psi}^{(-)}(x)\hat{A}^{(-)}(x)\psi^{(+)}(x) + \text{其它 7 项} \right]
\end{aligned} \tag{7.48}$$

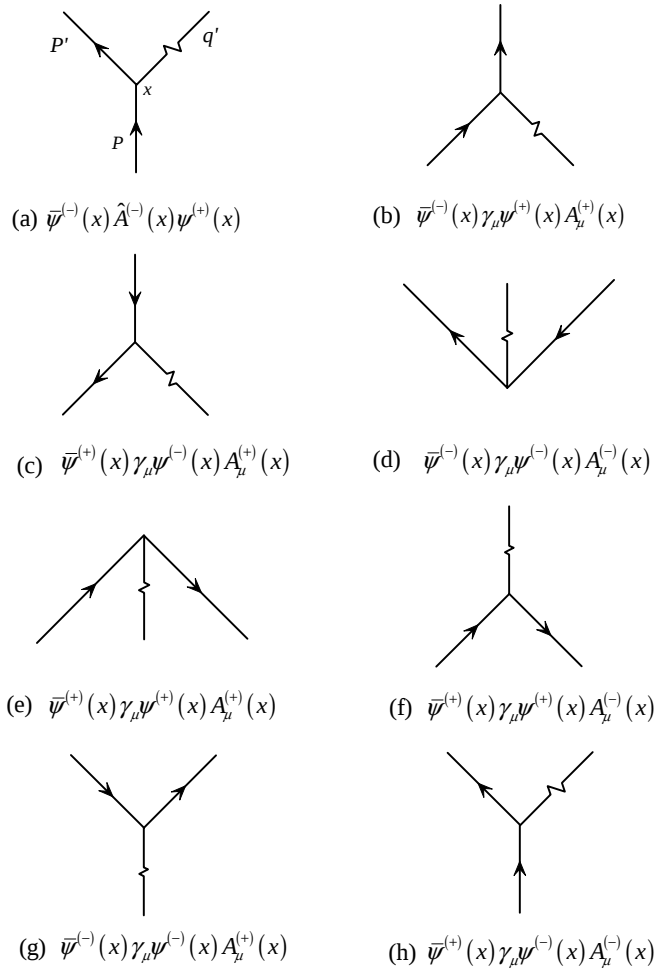
图 7.2 所示为为一阶微扰费曼图。

假设 $|i\rangle = C_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger |0\rangle$, $|f\rangle = C_{\mathbf{p}',\sigma'}^\dagger \alpha_{q',\lambda}^\dagger |0\rangle$, 则

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(1)} &= \langle 0|\alpha_{q',\lambda} C_{\mathbf{p}',\sigma'} S^{(1)} C_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger |0\rangle \\
&= (-e) \int d^4x \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \bar{u}_{\sigma'}(p') e^{-ip'x} \sqrt{\frac{m}{E'}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{1}{2\omega'}} \hat{e}_\lambda(q') e^{-iq'x} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{V}} u_\sigma(p) e^{ipx} \sqrt{\frac{m}{E}} \right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \right)^3 \sqrt{\frac{m^2}{EE'}} \sqrt{\frac{1}{2\omega'}} \bar{u}_{\sigma'}(p') \hat{e}_\lambda(q') u_\sigma(p) (-e) \int d^4x e^{i(p-p'-q')x} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \right)^3 \sqrt{\frac{m^2}{EE'}} \sqrt{\frac{1}{2\omega'}} \bar{u}_{\sigma'}(p') \hat{e}_\lambda(q') u_\sigma(p) (-e) \delta^4(p - p' - q')
\end{aligned}$$

注:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p},r} \sqrt{\frac{m}{E}} \{ C_r(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) e^{ipx} + d_r^\dagger(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) e^{-ipx} \}$$

图 7.2: S 矩阵的一阶微扰费曼图 (从小往上看, 逆向为反粒子)

$$A_{\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\lambda, \mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e_{\mu}^{\lambda}(\mathbf{k}) \{ \alpha_{\lambda}(k) e^{ikx} \bar{\alpha}_{\lambda}(k) e^{-ikx} \}$$

这中间用到对易关系 $\{C, C^{\dagger}\} = 1, [a, a^{\dagger}] = 1$ 。

从 S 矩阵元可知 $p - p' - q' = 0$, 即 $p = p' + q'$ 。如果取初态电子静止系 $\mathbf{p} = 0$, 则有 $\mathbf{p}' = -\mathbf{q}'$ 。而能量 $E(\mathbf{p}) = m \neq \sqrt{m^2 + \mathbf{p}'^2} + |\mathbf{p}'|$ 。所以不能同时保证能量-动量守恒。如果 P 代表电子激发态, 则 $(\mathbf{p}, im'), m' > m$, 则可以发生。

S 二阶矩阵元:

$$S^{(2)} = \frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 T \left[N \left(\bar{\psi}(x_1) \hat{A}(x_1) \psi(x_1) \right) N \left(\bar{\psi}(x_2) \hat{A}(x_2) \psi(x_2) \right) \right] \quad (7.49)$$

$$= \frac{(-e)^2}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 N \left(\bar{\psi}(x_1) \hat{A}(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \hat{A}(x_2) \psi(x_2) \right) \quad (7.50)$$

$$+ \frac{(-e)^2}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 N \left(\bar{\psi}(x_1) \underline{\hat{A}(x_1) \psi(x_1)} \bar{\psi}(x_2) \hat{A}(x_2) \psi(x_2) \right) \quad (7.51)$$

$$+ \frac{(-e)^2}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 N \left(\bar{\psi}(x_1) \hat{A}(x_1) \underline{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)} \hat{A}(x_2) \psi(x_2) \right) \quad (7.52)$$

$$+\frac{(-e)^2}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 N \left(\bar{\psi}(x_1) \hat{A}(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \hat{A}(x_2) \psi(x_2) \right) \quad (7.53)$$

$$+\frac{(-e)^2}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 N \left(\bar{\psi}(x_1) \hat{A}(x_1) \underline{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)} \hat{A}(x_2) \psi(x_2) \right) \quad (7.54)$$

$$+\frac{(-e)^2}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 N \left(\bar{\psi}(x_1) \hat{A}(x_1) \underline{\psi(x_1)} \bar{\psi}(x_2) \hat{A}(x_2) \psi(x_2) \right) \quad (7.55)$$

$$+\frac{(-e)^2}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 N \left(\bar{\psi}(x_1) \hat{A}(x_1) \underline{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)} \hat{A}(x_2) \psi(x_2) \right) \quad (7.56)$$

$$+\frac{(-e)^2}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 N \left(\bar{\psi}(x_1) \hat{A}(x_1) \underline{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)} \hat{A}(x_2) \psi(x_2) \right) \quad (7.57)$$

S 二阶矩阵元的部分费曼图如图 7.3 所示。

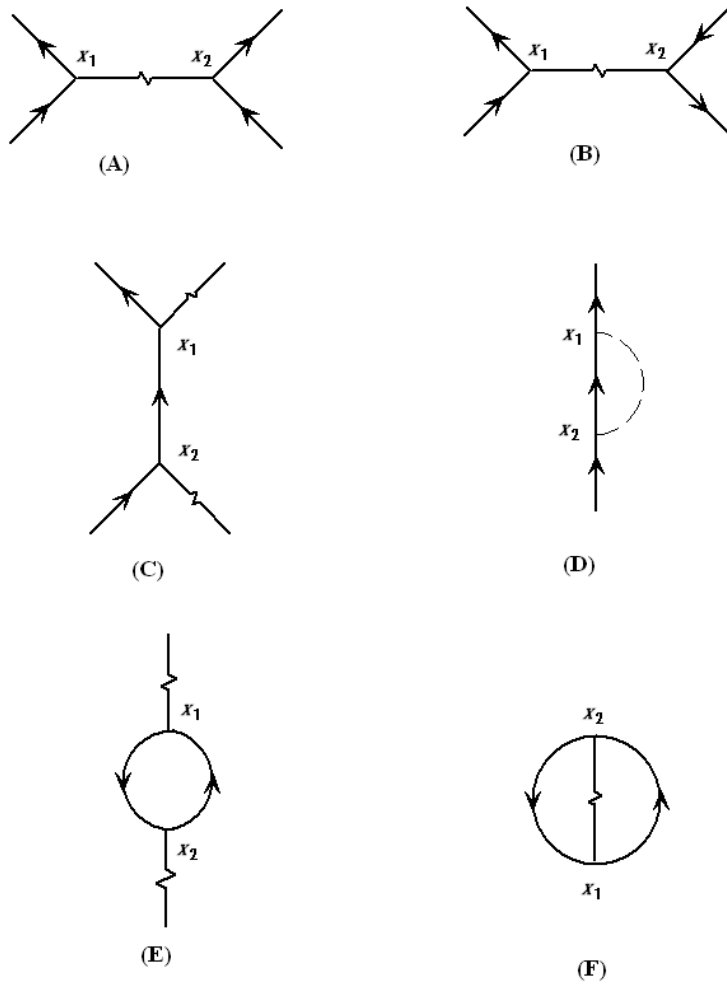


图 7.3: S 二阶微扰费曼图

(7.50) 式中没有收缩项, 在 x_1, x_2 点处各有三个粒子, 这个过程不会发生 (不符合能量动量守恒)。

(7.51) 式所表示的是一个典型过程, 在图 7.3(A) 中所示的为电子-电子散射, 图 7.3(B) 表示的为电子-正电子散射。

(7.52) 式描述的是电子-光子散射, 费曼图如图 7.3(C) 所示。注意在费曼图中, 费米子的方向是不能任意给的, 玻色子则可以不标明方向。

(7.53) 式的过程与 (7.52) 式描述的近似, 只是将 x_1, x_2 对调。

(7.54) 式表明的是一个电子自能过程。如图 7.3(D)。

(7.55) 式类似 (7.54) 式。

(7.56) 式描述的光子的真空极化。如图 7.3(E)。

(7.57) 式则反映了真空的涨落。如图 7.3(F)。

下面来详细分析一些典型过程:

1. 电子 - 电子散射如图 7.4(1) 所示

$$\begin{aligned}
 & \langle p' \sigma', q' \tau' | S^{(2)} | p \sigma, q \tau \rangle = A + B \\
 & = \langle p' \sigma', q' \tau' | N \left(\bar{\psi}^{(-)}(x_1) \gamma_\mu \psi^{(+)}(x_1) \bar{\psi}^{(-)}(x_2) \gamma_\nu \psi^{(+)}(x_2) \underline{A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)} \right) | p \sigma, q \tau \rangle \\
 & = \langle 0 | C_{q' \tau'} C_{p' \sigma} N \left(\bar{\psi}^{(-)}(x_1) \gamma_\mu \psi^{(+)}(x_1) \bar{\psi}^{(-)}(x_2) \gamma_\nu \psi^{(+)}(x_2) \underline{A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)} \right) C_{p \sigma}^\dagger C_{q \tau}^\dagger | 0 \rangle \quad (7.58)
 \end{aligned}$$

其中 A, B 分别为:

$$\begin{aligned}
 A & = (-e)^2 \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 e^{-ip' x_1} e^{ip x_1} e^{-iq' x_2} e^{iq x_2} \left[\frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E_{p'}}} \bar{u}_{p' \sigma'} \right] \gamma_\mu \left[\frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} u_{p \sigma} \right] \\
 & \quad \times \left[\frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E_{q'}}} \bar{u}_{q' \tau'} \right] \gamma_\nu \left[\frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E_q}} u_{q \tau} \right] \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{ik(x_1 - x_2)} \delta_{\mu\nu} \cdot \frac{-i}{k^2 - i\epsilon} \\
 & = \frac{e^2}{V^2} \left(\frac{m^4}{E_p E_q E_{p'} E_{q'}} \right)^{1/2} \int d^4 k (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p - k) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q' - q + k) \\
 & \quad \times \bar{u}_{p' \sigma'} \gamma_\mu u_{p \sigma} \left[\frac{1}{(2\pi)^4} \delta_{\mu\nu} \cdot \frac{-i}{k^2 - i\epsilon} \right] \bar{u}_{q' \tau'} \gamma_\nu u_{q \tau} \quad (7.59)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B & = -(-e)^2 \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 e^{-iq' x_1} e^{ip x_1} e^{-ip' x_2} e^{iq x_2} \left[\frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E_{q'}}} \bar{u}_{q' \tau'} \right] \gamma_\mu \left[\frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \bar{u}_{p \sigma} \right] \\
 & \quad \times \left[\frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E_{p'}}} \bar{u}_{p' \sigma'} \right] \gamma_\nu \left[\frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E_q}} u_{q \tau} \right] \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{ik(x_1 - x_2)} \delta_{\mu\nu} \cdot \frac{-i}{k^2 - i\epsilon} \\
 & = -e^2 \frac{1}{V^2} \left(\frac{m^4}{E_p E_q E_{p'} E_{q'}} \right)^{1/2} \int d^4 k (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q' - p - k) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - q + k) \\
 & \quad \times \bar{u}_{q' \tau'} \gamma_\mu u_{p \sigma} \left[\frac{1}{(2\pi)^4} \delta_{\mu\nu} \cdot \frac{-i}{k^2 - i\epsilon} \right] \bar{u}_{p' \sigma'} \gamma_\nu u_{q \tau} \quad (7.60)
 \end{aligned}$$

负号来源于费米统计, 因为 B 中发生了电子交换。 $A : N \left(C_{p'}^\dagger C_p C_{q'}^\dagger C_q \right), B : N \left(C_{q'}^\dagger C_p C_{p'}^\dagger C_q \right)$, 显然 A 和 B 相差一个负号。

2. 电子 - 正电子散射 (如图 7.4(2)):

$$\langle p' \sigma', q' \tau' | S^{(2)} | p \sigma, q \tau \rangle = A + B \quad (7.61)$$

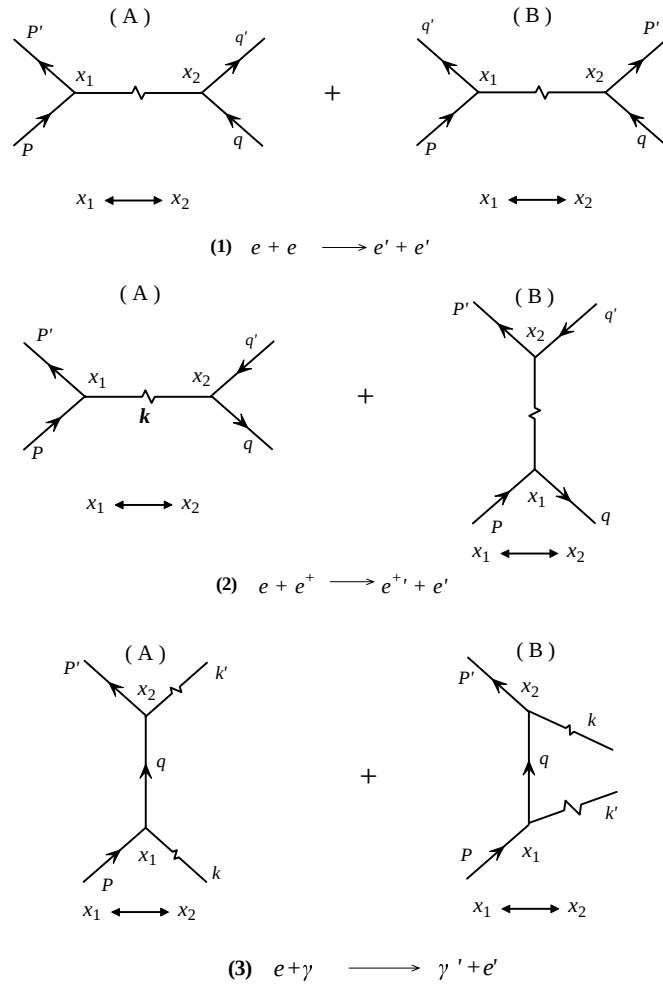
其中 A 贡献的 N 乘积为

$$N \left(\bar{\psi}^{(-)}(x_1) \gamma_\mu \psi^{(+)}(x_1) \bar{\psi}^{(+)}(x_2) \gamma_\nu \psi^{(-)}(x_2) \underline{A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)} \right) + N(x_1 \leftrightarrow x_2) \quad (7.62)$$

B 贡献的 N 乘积为

$$N \left(\bar{\psi}^{(+)}(x_1) \gamma_\mu \psi^{(+)}(x_1) \bar{\psi}^{(-)}(x_2) \gamma_\nu \psi^{(-)}(x_2) \underline{A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)} \right) + N(x_1 \leftrightarrow x_2) \quad (7.63)$$

相应的矩阵元为

图 7.4: S 二阶微扰费曼图典型过程分析

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{e^2}{V^2} \left(\frac{m^4}{E_p E_q E_{p'} E_{q'}} \right)^{1/2} \int d^4 k (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p - k) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q' - q + k) \\
 &\quad \times (\bar{u}_{p'\sigma'} \gamma_\mu u_{p\sigma}) \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 - i\epsilon} (\bar{v}_{q\tau} \gamma_\mu v_{q'\tau'})
 \end{aligned} \tag{7.64}$$

$$\begin{aligned}
 B &= -\frac{e^2}{V^2} \left(\frac{m^4}{E_p E_q E_{p'} E_{q'}} \right)^{1/2} \int d^4 k (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + q - k) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + q' - k) \\
 &\quad \times (\bar{u}_{p'\sigma'} \gamma_\mu v_{q'\tau'}) \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 - i\epsilon} (\bar{v}_{q\tau} \gamma_\mu u_{p\sigma})
 \end{aligned} \tag{7.65}$$

$$\tag{7.66}$$

负号来源于费米统计。

3. 光子-电子散射 (如图 7.4(3))

$$A: N \left(\bar{\psi}^{(-)}(x_1) \gamma_\mu \underline{\psi(x_1)} \bar{\psi}(x_2) \gamma_\nu \psi^{(+)}(x_2) A_\mu^{(-)}(x_1) A_\nu^{(+)}(x_2) \right) + N(x_1 \leftrightarrow x_2) \tag{7.67}$$

$$B: N \left(\bar{\psi}^{(-)}(x_1) \gamma_\mu \underline{\psi(x_1)} \bar{\psi}(x_2) \gamma_\nu \psi^{(+)}(x_2) A_\mu^{(+)}(x_1) A_\nu^{(-)}(x_2) \right) + N(x_1 \leftrightarrow x_2) \tag{7.68}$$

矩阵元

$$\langle k'\lambda', p'\sigma' | S^{(2)} | k\lambda, p\sigma \rangle = A + B$$

其中 A, B 分别为

$$A = \frac{e^2}{V^2} \left(\frac{m^2}{4\omega\omega' E_p E_{p'}} \right)^{1/2} \int d^4 q (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + k - q) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p' - k')$$

$$e_{k'\lambda'}^\mu \bar{u}_{p'\sigma'} \gamma_\mu \left[\frac{1}{(2\pi)^4} \frac{-i}{i\hat{q} + m} \right] \gamma_\nu u_{p\sigma} e_{k\lambda}^\nu \quad (7.69)$$

$$B = \frac{e^2}{V^2} \left(\frac{m^2}{4\omega\omega' E_p E_{p'}} \right)^{1/2} \int d^4 q (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k' - q) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p' + k)$$

$$e_{k\lambda}^\mu \bar{u}_{p'\sigma'} \gamma_\mu \left[\frac{1}{(2\pi)^4} \frac{-i}{i\hat{q} + m} \right] \gamma_\nu u_{p\sigma} e_{k'\lambda'}^\nu \quad (7.70)$$

$$(7.71)$$

注意, 在 feynman 图中 Fermi 子方向是确定的, Bose 子的方向可以不确定。

4. 电子自能

对应 N 乘积项为 $\bar{\psi}_\alpha(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \psi_\beta \bar{\psi}_{\alpha'}(\gamma_\nu)_{\alpha'\beta'} \psi_{\beta'}$ 。

矩阵元为 $\langle p'\sigma' | S^{(2)} | p\sigma \rangle$ 。

N 乘积为

$$N \left(\bar{\psi}^{(-)}(x_1) \gamma_\mu \underline{\psi(x_1)} \bar{\psi}(x_2) \gamma_\nu \psi^{(+)}(x_2) \underline{A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)} \right) + (x_1 \leftrightarrow x_2)$$

矩阵元为

$$\langle p'\sigma' | S^{(2)} | p\sigma \rangle = \frac{e^2}{V} \left(\frac{m^2}{E_p E_{p'}} \right)^{1/2} \int d^4 q \int d^4 k (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - q - k) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q + k - p')$$

$$\bar{u}_{p'\sigma'} \gamma_\mu \left[\frac{1}{(2\pi)^4} \frac{-i}{i\hat{q} + m} \right] \gamma_\nu u_{p\sigma} \left[\frac{1}{(2\pi)^4} \delta_{\mu\nu} \frac{-i}{k^2 - i\epsilon} \right]$$

$$= -\frac{e^2}{V} \left(\frac{m^2}{E_p E_{p'}} \right)^{1/2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p) \bar{u}_{p'\sigma'} \Sigma(p) u_{p\sigma} \quad (7.72)$$

其中

$$\Sigma(p) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4 k \gamma_\mu \frac{-i}{i(\hat{p} - \hat{k}) + m} \gamma_\mu \frac{-i}{k^2 - i\epsilon}$$

5. 光子的真空极化

矩阵元

$$\langle k'\lambda' | S^{(2)} | k\lambda \rangle \propto \langle 0 | \alpha_{k'\lambda'} N \left(\bar{\psi}(x_1) \gamma_\mu \underline{\psi(x_1)} \bar{\psi}(x_2) \gamma_\nu \psi(x_2) \underline{A_\mu^{(-)}(x_1) A_\nu^{(+)}(x_2)} \right) | 0 \rangle$$

$$\langle 0 | \alpha_{k'\lambda'} N \left(\bar{\psi}(x_1) \gamma_\mu \underline{\psi(x_1)} \bar{\psi}(x_2) \gamma_\nu \psi(x_2) \underline{A_\mu^{(+)}(x_1) A_\nu^{(-)}(x_2)} \right) | 0 \rangle$$

最终的形式为

$$\langle k'\lambda' | S^{(2)} | k\lambda \rangle = \frac{e^2}{V} \left(\frac{1}{4\omega\omega'} \right)^{1/2} \int d^4 q \int d^4 p (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k + q - p) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k' + q - p)$$

$$e_{k'\lambda'}^\mu e_{k\lambda}^\nu (-1) \text{Tr} \left[\gamma_\mu \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{-i}{i\hat{q} + m} \gamma_\nu \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{-i}{i\hat{p} + m} \right]$$

$$= \frac{ie^2}{V^2} \frac{1}{2\omega} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k - k') e_{k'\lambda}^\mu e_{k\lambda}^\nu \Pi_{\mu\nu}(k) \quad (7.73)$$

其中

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p \operatorname{Tr} \left(\gamma_\mu \frac{-i}{i(\hat{p} - \hat{k}) + m} \gamma_\nu \frac{-i}{i\hat{p} + m} \right)$$

注意

$$\begin{aligned} \underline{\bar{\psi}(x_1) \gamma_\mu \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma_\nu \psi(x_2)} &= -(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \underline{\psi_\beta(x_1) \bar{\psi}_\alpha(x_2)} (\gamma_\nu)_{r\delta} \underline{\psi_\delta(x_2) \bar{\psi}_r(x_1)} \\ &= -\operatorname{Tr}(\gamma_\mu S_f(x_1 - x_2) \gamma_\nu S_f(x_2 - x_1)) \end{aligned} \quad (7.74)$$

其中负号来源于交换费米子算符。

注意:

$$S_f(x_1 - x_2) = \langle 0|T(\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2))|0\rangle$$

6. 真空 - 真空跃迁

由于 $S^\dagger S = I$ ，定义 $C = \langle 0|S|0\rangle$ ，则 $C = e^{i\delta}$ 。真空 - 真空极化可能伴随另一物理发生。

§7.4.3 Feynman 规则

1. 每一条内部费米子线贡献为，如图 7.5 所示。

$$\int d^3p S_f(p), \quad S_f(p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{-i}{i\hat{p} + m} \quad (7.75)$$

$$S_f(x_1 - x_2) = \int d^4p S_f(p) e^{ip(x_1 - x_2)}$$

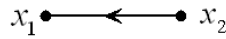


图 7.5: 内部费米子线

2. 外部费米子线贡献

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E}} \bar{u}_r(p) \quad \text{产生费米子 (动量 } p, \text{ 极化 } r), \text{ 如图 7.6(a)} \quad (7.76)$$

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E}} v_r(p) \quad \text{产生反费米子 (动量 } p, \text{ 极化 } r), \text{ 如图 7.6(b)} \quad (7.77)$$



图 7.6: 外部费米子线 I

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E}} u_r(p) \quad \text{消灭费米子 (动量 } p, \text{ 极化 } r), \text{ 如图 7.7(a)} \quad (7.78)$$

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E}} \bar{v}_r(p) \quad \text{消灭反费米子 (动量 } p, \text{ 极化 } r), \text{ 如图 7.7(b)} \quad (7.79)$$



图 7.7: 外部费米子线 II

3. 每条内部光子线的贡献 (Lorentz Gauge) 如图 7.8 所示:

$$\delta_{\mu\nu} \int d^4k D_f(k) \quad D_f(k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 - i\epsilon} \quad (7.80)$$

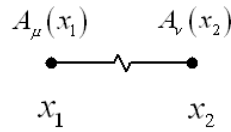


图 7.8: 内部光子线

4. 外部光子线的贡献, 如图 7.9。

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e_\mu^\lambda(k) \quad \text{产生光子 (动量 } k, \text{ 极化 } \lambda) \text{ 如图 7.9(a)} \quad (7.81)$$

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e_\mu^\lambda(k) \quad \text{消灭光子 (动量 } k, \text{ 极化 } \lambda) \text{ 如图 7.9(b)} \quad (7.82)$$



图 7.9: 外部光子线

5. 每个顶角项的贡献 $(-e)\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(\sum p)$, 如图 7.10 所示。

$$H_I = -ieN (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu) \rightarrow (-ie)(-i) = (-e)$$

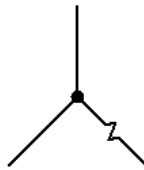


图 7.10: 顶角项的贡献

6. 每个封闭的费米子圈的贡献

注: 逆着箭头的方向 (逆时针) 书写表达式, 但是这并不意味着初态一定在末尾, 末态一定在开始, 对于反粒子则恰好相反。矩阵永远是以带 bar 的开始。贡献为

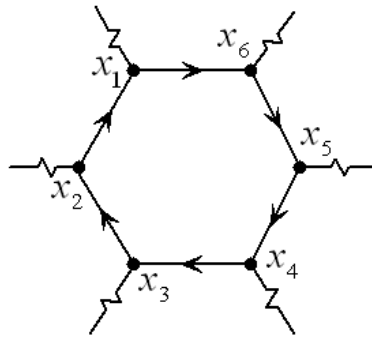


图 7.11: 封闭费米子圈

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3)\gamma_\rho\cdots\bar{\psi}(x_6)\gamma_\delta\psi(x_6)}{=} \\ &= (-1) \text{Tr} [\gamma_\mu S_f(x_1 - x_2)\gamma_\nu S_f(x_2 - x_3)\cdots S_f(x_6 - x_1)] \end{aligned} \quad (7.83)$$

附:

又如电子光子散射的第一种情况 (图 7.4(3)(A))

$$\int d^4q \bar{u}(p')\gamma_\mu \frac{-i}{i\hat{q} + m} \gamma_\nu u(p) e_\mu^{\lambda'}(k') e_\nu^\lambda(k) \delta^4(p + k - p' - k') \quad (7.84)$$

§7.4.4 其它 feynman 规则

1. 同位旋守恒的相互作用的 feynman 规则

相互作用的拉氏量即顶角项为

$$\begin{aligned} H_I = \mathcal{L}_I &= -iGN\bar{\gamma}_5\tau N \cdot \bar{\varphi} \\ &= -iG\frac{1}{2}[\bar{N}, \gamma_5\tau N] \varphi = -iGN(\bar{N}\gamma_5\tau N \cdot \varphi) \end{aligned} \quad (7.85)$$

其中 $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}$ 为同位旋空间矢量, $\bar{N}\gamma_5\tau N \cdot \varphi$ 在同位旋空间转动不变, 其中: $\psi^+ \rightarrow \varphi_+ =$

$1/\sqrt{2}(\varphi_1 + i\varphi_2), \pi^- \rightarrow \varphi_- = 1/\sqrt{2}(\varphi_1 - i\varphi_2), \pi^0 \rightarrow \varphi_0 = \varphi_3$ 。

有关的费米图 7.12。

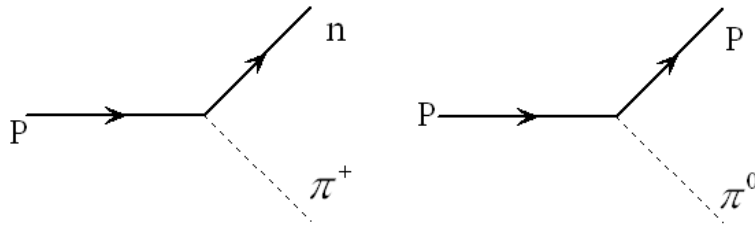


图 7.12: 核子-π介子作用顶角

(1.1) 介子内线 (图 7.13)

$$\int d^4k \frac{1}{(4\pi)^4} \frac{-i}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \delta_{ij} \quad (7.86)$$



图 7.13: 介子内线和核子内线

其中 μ 为介子质量。

(1.2) 核子内线 (图 7.13)

$$\int d^4p \frac{1}{(4\pi)^4} \frac{-i}{i\hat{p} + m - i\varepsilon} \quad (7.87)$$

其中 m 为核子质量。

(1.3) 顶角 (图 7.14)

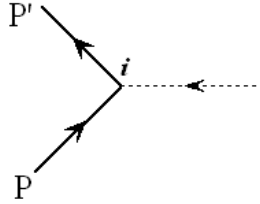


图 7.14: 顶角

$$-G\gamma_5\tau_i(2\pi)^4\delta^4(p' - p - k) \quad (7.88)$$

2. 弱相互作用 (四费米子相互作用), 等效费米图 (图 7.15)

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad \text{轻子数守恒} \quad (7.89)$$

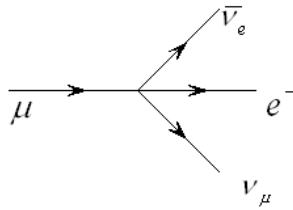


图 7.15: 四费米子相互作用

相互作用的拉氏量为

$$\mathcal{L}_I = \frac{1}{\sqrt{2}}G \{ \bar{\nu}_\mu \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \mu \} \{ \bar{e} \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \nu_e \} + h.c. (\text{厄米共轭}) \quad (7.90)$$

其中 $\bar{\nu}_\mu = \bar{\psi}_{\nu_\mu}(x)$, $\mu = \psi_\mu(x)$, $\bar{e} = \bar{\psi}_e(x)$, $\nu_e = \psi_{\nu_e}(x) \rightarrow$ 相当于消灭一个中微子或者产生一个反中微子。

这是一个典型的 $V - A$ 型相互作用, 介子 (强子) $\rightarrow$ 轻子。

$$\bar{\psi}_1 \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \psi_2 \bar{\psi}_3 \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \psi_4 \quad (7.91)$$

例如可以通过下列过程讨论轻子的普适性。

$$\pi^- \rightarrow \begin{cases} \mu^- + \bar{\nu}_\mu & \text{主反应道} \\ e^- + \bar{\nu}_e & \text{可忽略} \end{cases} \quad (7.92)$$

但是轻子有三代，由于 τ 轻子的质量比 π^- 介子的质量大，所以不会发生上述过程。作用的拉氏量为

$$\mathcal{L}_I = ig_\pi [\bar{u}\gamma_\lambda(1 + \gamma_5)\nu_\mu + e^-\gamma_\lambda(1 + \gamma_5)\nu_e + \bar{\tau}\gamma_\lambda(1 + \gamma_5)\nu_\tau] \partial_\lambda\varphi_{\pi^-} + h.c. \quad (7.93)$$

费曼图为 (图 7.16)

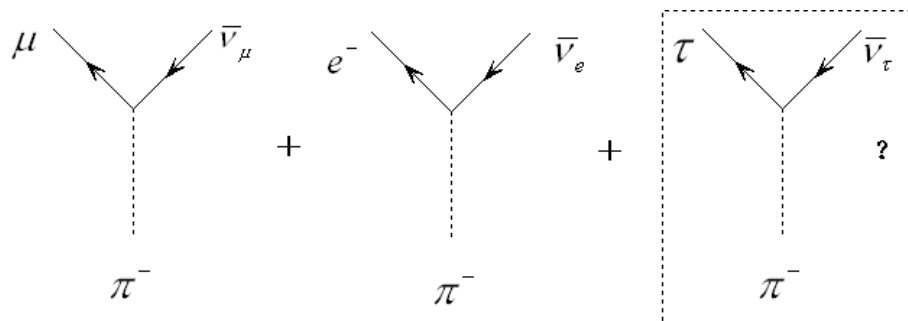


图 7.16: 轻子普适性

第八章 散射和衰变过程的微扰计算

§8.1 散射截面和衰变寿命的一般公式

散射 $1 + 2 \rightarrow 1 + 2 + \cdots + n$, 如 $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma, \cdots, p + \bar{p} \rightarrow n + \pi$ 等等。

衰变 $1 \rightarrow 1 + 2 + \cdots + n$, 如 $\pi \rightarrow \mu\bar{\nu}, J/\psi \rightarrow 3g, n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ 等。

散射算符 $S = 1 + iR$, 其中 R_{fi} 为初态 $|i\rangle$ 到末态 $|f\rangle$ 的跃迁振幅。

$$R_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_i - \sum p_f) \frac{1}{V^{(n_i+n_f)/2} N_i N_f} T_{fi} \leftrightarrow \frac{1}{N'_i N'_f} T'_{fi} \quad (8.1)$$

其中 n_i, n_f 分别为初末态的粒子数。

$$N_i = \prod_i \sqrt{2\omega_i} \sqrt{\frac{E_i}{m_i}} \quad N_f = \prod_f \sqrt{2\omega_f} \sqrt{\frac{E_f}{m_f}}$$

$$N_i = \prod_i \sqrt{2\omega_i} \sqrt{E_i} \quad N_f = \prod_f \sqrt{2\omega_f} \sqrt{E_f}$$

初态到末态的跃迁几率 (在大 T 间隔 $t = -\infty \rightarrow t = +\infty$ 时间间隔完成的)

$$|R_{fi}|^2 = (2\pi)^8 \delta^4(\sum p_i - \sum p_f) \delta^4(0) \frac{1}{V^{(n_i+n_f)} N_i^2 N_f^2} |T_{fi}|^2 \quad (8.2)$$

$$\delta^4(0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{ipx} \Big|_{p=0} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x = TV \frac{1}{(2\pi)^4} \quad (8.3)$$

单位时间的跃迁几率为

$$\Gamma_{fi} = \frac{|R_{fi}|^2}{T} = (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_i - \sum p_f) V \frac{1}{V^{(n_i+n_f)} N_i^2 N_f^2} |T_{fi}|^2 \quad (8.4)$$

§8.1.1 散射截面

定义: 单位时间, 单位入射流到各种可能终态的跃迁几率。流因子 (incident flux factor), $a + b \rightarrow 1 + 2 + \cdots + n$

以实验室系来讨论问题 $\bar{P}_b^{lab} = 0$, 即靶 b 的静止系。从而 $F = v_a/V$, $1/V$: 单位体积内的粒子数。

$$\sigma = \sum_{\mathbf{p}_f} \frac{F_{fi}}{F} = \frac{1}{4F} \int |T'_{fi}|^2 dLIPS(s, p_1, \cdots, p_n) \quad (8.5)$$

其中 Lorentz 不变相空间:

$$dLIPS(s, p_1, \cdots, p_n) = (2\pi)^4 \delta^4(p - \sum_f p_f) \frac{1}{(2\pi)^{3n}} \prod_{f=1}^n \frac{d^3p_f}{2E_f} \quad (8.6)$$

注意: 质心系总能为 $s = -(p_a + p_b)^2 = (E_a + E_b)_{c.m.}^2$ 。负号来源于 1234 度规。

在实验室系 $F = v_a/V$, 在一般系 $F = |\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b|/V$, 其中 $\mathbf{v} = \mathbf{p}/E$ 相对论速度。

质心系 $\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b = 0, \rightarrow \mathbf{p}_a = -\mathbf{p}_b = \mathbf{p}_{c.m.}$, 此时

$$F = \frac{|\mathbf{p}_{c.m.}|}{V} \left(\frac{1}{E_a} + \frac{1}{E_b} \right) = \frac{|\mathbf{p}_{c.m.}|}{V} \frac{1}{E_a E_b} (E_a + E_b) \quad (8.7)$$

协变形式

$$F = \frac{1}{V} \frac{1}{E_a E_b} f \quad (8.8)$$

其中 Møller's invariant flux factor,

$$f = \sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2} \quad (8.9)$$

可证 $f^2 = s |\mathbf{p}_{c.m.}|^2$, s 为质心系总能。

核子和 π 介子间的相互作用

顶角项为

$$\bar{N} \gamma_5 \boldsymbol{\tau} N \cdot \boldsymbol{\varphi} = \bar{N}_a \gamma_5 (\tau_i)_{ab} N_b \varphi_i \quad (8.10)$$

首先我们有关系式

$$\bar{\psi} \gamma_5 \psi = \frac{1}{2} [\bar{\psi}, \gamma_5 \psi] = N \bar{\psi} \gamma_5 \psi \quad (8.11)$$

π 介子的表达形式为

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \varphi^\pm &= 1/\sqrt{2}(\varphi_1 \pm i\varphi_2) \\ \varphi^0 &= \varphi_3 \end{aligned} \quad (8.12)$$

核子为

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} N_{a=1} &= \psi_p \\ N_{a=2} &= \psi_n \end{aligned} \quad (8.13)$$

所以在顶角项取 $i = 1$ 时为

$$(\bar{\psi}_p, \bar{\psi}_n) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \gamma_5 \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} \varphi_1 \quad (8.14)$$

另外

$$\underline{\varphi_i(x) \varphi_j(x')} = \Delta_F(x - x') \delta_{ij}, \quad \underline{N_a(x) N_b(x')} = S_f(x - x') \delta_{ab} \quad (8.15)$$

顶角项的第三分量为

$$(\bar{\psi}_p(x) \gamma_5 \psi_p - \bar{\psi}_n(x) \gamma_5 \psi_n) \varphi_3, \text{ for } \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

§8.1.2 衰变宽度和寿命

衰变宽度——单位时间到各种可能末态的跃迁几率。

单位时间的跃迁几率为

$$\Gamma_{fi} = \frac{|R_{fi}|^2}{T} \quad (8.17)$$

注意 T_{fi}, T'_{fi} 的区别: T_{fi} 抽去 $1/\sqrt{2\omega} \sqrt{m/E}$, 而 T'_{fi} 抽去 $1/\sqrt{2\omega} \cdot 1/\sqrt{2E}$

取初态粒子静止系, 即 $E_i = M$, 衰变的总宽度为

$$\Gamma = \sum_{\mathbf{p}_f} \Gamma_{fi} = \frac{1}{2M} \int |T'_{fi}|^2 dLIPS \quad (8.18)$$

寿命 $\tau = \Gamma^{-1} \rightarrow \tau \Gamma = 1$, Γ 本质上说是一个跃迁的几率。

例如 Compton 散射 $e + \gamma \rightarrow e + \gamma$, 对初态粒子 (包括电子和光子) 的极化求平均, 对末态粒子极化 (pol.=polize) 求平均后

$$\sigma_{unpol.} = \left(\frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^2 \right) \sum_{\lambda'=1}^2 \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 \right) \sum_{r'=1}^2 \sigma_{pol.} \quad (8.19)$$

有关的求迹公式:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^2 \sum_{r'=1}^2 |\bar{u}_{r'}(p') t u_r(p)|^2 &= \sum_{r, r'} \bar{u}_r(p) \gamma_4 t^\dagger \gamma_4 u_{r'}(p') \bar{u}_{r'}(p') t u_r(p) \\ &= \sum_r \bar{u}_r(p) \gamma_4 t^\dagger \gamma_4 \frac{m - i \hat{p}'}{2m} t u_r(p) \\ &= \text{Tr} \left(\frac{m - i \hat{p}}{2m} \gamma t^\dagger \gamma_4 \frac{m - i \hat{p}'}{2m} t \right) \end{aligned} \quad (8.20)$$

$$\sum |\bar{u}_{r'}(p') t v_r(p)|^2 = \text{Tr} \left(\frac{-m - i \hat{p}}{2m} \gamma t^\dagger \gamma_4 \frac{m - i \hat{p}'}{2m} t \right) \quad (8.21)$$

后一种情况对应于光子 - 正负电子对。

γ 矩阵的求迹公式

1. $\text{Tr}(\hat{a}_1 \hat{a}_2 \cdots \hat{a}_n) = 0$, 如果 n 为奇数。其中 $\hat{a} = a_\mu \gamma_\mu$

证明: 因为 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, 则

$$\gamma_5 (\hat{a}_1 \hat{a}_2 \cdots \hat{a}_n) \gamma_5 = (-1)^n (\hat{a}_1 \hat{a}_2 \cdots \hat{a}_n) \gamma_5^2 = (-1)^n (\hat{a}_1 \hat{a}_2 \cdots \hat{a}_n)$$

所以

$$\begin{aligned} \text{Tr} \gamma_5 (\hat{a}_1 \hat{a}_2 \cdots \hat{a}_n) \gamma_5 &= \text{Tr} (\hat{a}_1 \hat{a}_2 \cdots \hat{a}_n) \gamma_5^2 = \text{Tr} (\hat{a}_1 \hat{a}_2 \cdots \hat{a}_n) \\ &= (-1)^n \text{Tr} (\hat{a}_1 \hat{a}_2 \cdots \hat{a}_n) \end{aligned}$$

如果 n 为奇数, 则推出了结论。推导的过程中用到 $\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0, \gamma_5^2 = 1$ 。

2. $\text{Tr}(\hat{a}\hat{b}) = 4(ab)$, $(ab) = a \cdot b = a_\mu b_\mu$

中间用到 $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$, 所以 $\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = \text{Tr}(\delta_{\mu\nu}) = \delta_{\mu\nu} \text{Tr} 1 = 4\delta_{\mu\nu}$ 。

所以

$$\text{Tr}(\hat{a}\hat{b}) = a_\mu b_\nu \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4(ab) \quad (8.22)$$

3. (a). $\text{Tr}(\gamma_5) = 0$; (b). $\text{Tr}(\gamma_5 \hat{a}\hat{b}) = 0$; (c). $\text{Tr}(\gamma_5 \hat{a}\hat{b}\hat{c}) = 0$; (d). $\text{Tr}(\gamma_5 \hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}) = 4\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} a_\mu b_\nu c_\rho d_\sigma$

证明:

$$(3.1) \quad \text{Tr}(\gamma_5) = \text{Tr}(\gamma_5 \gamma_1 \gamma_1) = -\text{Tr}(\gamma_1 \gamma_5 \gamma_1) = -\text{Tr}(\gamma_5 \gamma_1 \gamma_1) = -\text{Tr}(\gamma_5) = 0$$

$$(3.2) \quad \text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu) = \text{Tr}(\gamma_5), \text{ 当 } \mu = \nu; \quad \text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu) = \text{Tr}(\gamma_\rho \gamma_\sigma)|_{\rho \neq \sigma} = 0, \text{ 因为 } \gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4。$$

$$(3.3) \quad \text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = 4\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \text{ 不等于 } 0 \text{ 的条件是 } \mu\nu, \rho\sigma \text{ 各不相同。}$$

4. 当 n 为偶数时,

$$\text{Tr}(\hat{a}_1 \hat{a}_2 \cdots \hat{a}_n) = \text{Tr}(\hat{a}_n \cdots \hat{a}_2 \hat{a}_1) \quad (8.23)$$

证明: $\tilde{\gamma}_\mu = -\mathbf{C}^{-1} \gamma_\mu \mathbf{C}$, $\sim$ 为转置。

$$\text{Tr}(\hat{a}_1 \hat{a}_2 \cdots \hat{a}_n) = \text{Tr}(\mathbf{C} \mathbf{C}^{-1} \hat{a}_1 \hat{a}_2 \cdots \hat{a}_n) \text{ 利用 } \text{Tr}(ab) = \text{Tr}(ba)$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Tr}(\mathbf{C}^{-1}\hat{a}_1\hat{a}_2\cdots\hat{a}_n\mathbf{C}) \\
&= \text{Tr}(\mathbf{C}^{-1}\hat{a}_1\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}\hat{a}_2\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}\cdots\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}\hat{a}_n\mathbf{C}) \\
&= (-1)^n \text{Tr}(\widetilde{\hat{a}_1\hat{a}_2\cdots\hat{a}_n}) \\
&= (-1)^n \text{Tr}(\widetilde{\hat{a}_n\cdots\hat{a}_2\hat{a}_1}) \text{ 这中间利用了 } \text{Tr}(\widetilde{AB}) = \text{Tr}(\widetilde{B}\widetilde{A}) \\
&= (-1)^n \text{Tr}(\hat{a}_n\cdots\hat{a}_2\hat{a}_1)
\end{aligned}$$

当 n 为偶数时, 即得到了结论。

5. 当 n 为偶数时,

$$\text{Tr}(\hat{a}_1\hat{a}_2\cdots\hat{a}_n) = (a_1a_2) \text{Tr}(\hat{a}_3\cdots\hat{a}_n) - (a_1a_3) \text{Tr}(\hat{a}_2\cdots\hat{a}_n) + \cdots + (a_1a_n) \text{Tr}(\hat{a}_2\cdots\hat{a}_{n-1}) \quad (8.24)$$

证明: 因为 $\hat{a}_1\hat{a}_2 = -\hat{a}_2\hat{a}_1 + 2(a_1a_2)$ 所以:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\hat{a}_1\hat{a}_2\cdots\hat{a}_n) &= 2(a_1a_2) \text{Tr}(\hat{a}_3\cdots\hat{a}_n) - \text{Tr}(\hat{a}_2\hat{a}_1\cdots\hat{a}_n) = \cdots \\
&= 2(a_1a_2) \text{Tr}(\hat{a}_3\cdots\hat{a}_n) - 2(a_1a_3) \text{Tr}(\hat{a}_2\hat{a}_4\cdots\hat{a}_n) + \cdots \\
&\quad + 2(a_1a_n) \text{Tr}(\hat{a}_2\cdots\hat{a}_{n-1}) - \text{Tr}(\hat{a}_2\cdots\hat{a}_n\hat{a}_1)
\end{aligned}$$

利用 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ 则 $\text{Tr}(\hat{a}_2\cdots\hat{a}_n\hat{a}_1) = \text{Tr}(\hat{a}_1\hat{a}_2\cdots\hat{a}_n)$, 所以推出结论。

特例: 对于 $n = 4$,

$$\text{Tr}(\hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3\hat{a}_4) = 4(a_1a_2)(a_3a_4) - 4(a_1a_3)(a_2a_4) + 4(a_1a_4)(a_2a_3) \quad (8.25)$$

其它常用的公式有,

1. $\hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a} = (\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu)a_\mu b_\nu = 2\delta_{\mu\nu}a_\mu b_\nu = 2(ab)$
2. $\gamma_\mu\hat{a}\gamma_\mu = -2\hat{a}$
3. $\gamma_\mu\hat{a}\hat{b}\gamma_\mu = 4(ab)$
4. $\gamma_\mu\hat{a}\hat{b}\hat{c}\gamma_\mu = -2\hat{c}\hat{b}\hat{a}$
5. $\gamma_\mu\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}\gamma_\mu = 2(\hat{d}\hat{a}\hat{b}\hat{c} + \hat{c}\hat{b}\hat{a}\hat{d})$

证明:

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu\hat{a}\gamma_\mu &= \gamma_\mu(\gamma_\nu a_\nu)\gamma_\mu = \gamma_\mu(2\delta_{\mu\nu} - \gamma_\mu\gamma_\nu)a_\nu = 2\hat{a} - 4\hat{a} = -2\hat{a} \\
\gamma_\mu\hat{a}\hat{b}\gamma_\mu &= \gamma_\mu(\gamma_\nu a_\nu)(\gamma_\rho a_\rho)\gamma_\mu = -\gamma_\mu\hat{a}\gamma_\mu\hat{b} + 2\gamma_\mu\hat{a}b_\mu \\
&= 2\hat{a}\hat{b} + 2\hat{b}\hat{a} = 4(ab) \\
\gamma_\mu\hat{a}\hat{b}\hat{c}\gamma_\mu &= (-\hat{a}\gamma_\mu + 2a_\mu)\hat{b}(-\gamma_\mu\hat{c} + 2c_\mu) = 4(ac)\hat{b} - 2\hat{b}\hat{a}\hat{c} - 2\hat{a}\hat{c}\hat{b} \\
&= 2\hat{b}\hat{c}\hat{a} - 4(cb)\hat{a} = -2\hat{c}\hat{b}\hat{a} \\
\gamma_\mu\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}\gamma_\mu &= \gamma_\mu\hat{a}\hat{b}\hat{c}\gamma_\mu\hat{d} + 2\gamma_\mu(\hat{a}\hat{b}\hat{c})d_\mu \\
&= 2(\hat{d}\hat{a}\hat{b}\hat{c} + \hat{c}\hat{b}\hat{a}\hat{d})
\end{aligned}$$

§8.2 规范不变性和流守恒

拉氏量 $\mathcal{L}_I = ej_\mu A_\mu$ ，流 $j_\mu = i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ ，考虑 S 矩阵元，设有一外线光子，则 $T_{fi} \propto L_\mu e_\mu^\lambda(k)$ ，一般的 $T \propto L_\mu a_\mu(k)$ 。

考虑规范 (Lorentz 规范) 不变 $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ ，理论形式不变则有 $a_\mu(k) \rightarrow a_\mu(k) + ik_\mu \Lambda(k)$ ，所以

$$\begin{aligned} L_\mu a_\mu(k) &= L_\mu a'_\mu(k) \\ &= L_\mu a_\mu(k) + iL_\mu k_\mu \Lambda(k) \rightarrow L_\mu k_\mu = 0 \end{aligned} \quad (8.26)$$

举例

§8.2.1 矩阵元中含有光子

1. 一个光子的情形，如图 8.1 所示。

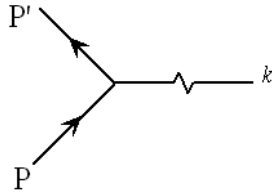


图 8.1: 含有一个外线光子

$$\begin{aligned} L_\nu k_\nu &= i\bar{u}(p')\gamma_\nu u(p)k_\nu, \quad k = p - p' \\ &= i\bar{u}(p')(\hat{p} - \hat{p}')u(p) \\ &= \bar{u}(p')(i\hat{p} + m - i\hat{p}' - m)u(p) = 0 \quad \text{由场方程可以推出} \end{aligned}$$

2. 含有两个光子的情形，如图 8.2 所示。

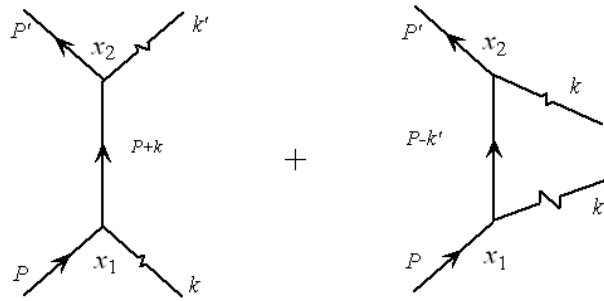


图 8.2: 含有两个外线光子

$$\begin{aligned} S^{(2)} &\propto L_\nu e_\nu^\lambda(k) \\ &= \bar{u}(p')t_{\mu\nu}u(p)e_\mu^{\lambda'}(k')e_\nu^\lambda(k) \end{aligned} \quad (8.27)$$

即 $L_\nu = \bar{u}(p')t_{\mu\nu}u(p)e_\mu^{\lambda'}(k')$ ，所以

$$\begin{aligned}
L_\nu k_\nu &= \bar{u}(p') t_{\mu\nu} u(p) e_\mu^{\lambda'}(k') k_\nu \\
&= -ie^2 \bar{u}(p') \left[\hat{e}^{\lambda'}(k') \frac{-i}{i(\hat{p} + \hat{k}) + m} \hat{k} + \hat{k} \frac{-i}{i(\hat{p} - \hat{k}') + m} \hat{e}^{\lambda'}(k') \right] u(p)
\end{aligned}$$

因为 $(i\hat{p} + m)u(p) = 0$ 所以 $\bar{u}(p')(-i\hat{k}) = \bar{u}(p')(i(\hat{p}' - \hat{k}) + m) = \bar{u}(p')(i(\hat{p} - \hat{k}') + m)$ ，从而推出原式为

$$L_\nu k_\nu = -ie^2 \bar{u}(p') \left[-\hat{e}^{\lambda'}(k') + \hat{e}^{\lambda'}(k') \right] u(p) = 0 \quad (8.28)$$

以上的证明对于把 $e^\lambda(k), e^{\lambda'}(k')$ 换成内线光子也是对的 $k \neq 0, k' \neq 0$ 。

另外，图 8.2 还可表示成图 8.3 的形式。

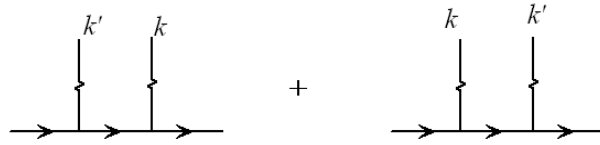


图 8.3: 含有两个外线光子

可以证明，对于含有 n 个光子的情形 (图 8.4)，仍旧有

$$L_\nu k_\nu = 0 \quad (8.29)$$

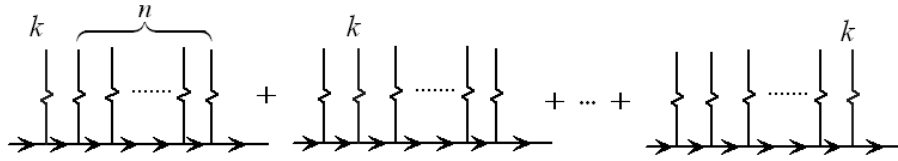


图 8.4: 含有 n 个外线光子

下面来讨论一下 n 个外线光子如图 8.5 的情形，则有

$$g(p, p', q_i, a_i) = \frac{1}{i\hat{p}' + m} \hat{a}_n \frac{1}{i\hat{p}_{n-1} + m} \hat{a}_{n-1} \cdots \hat{a}_2 \frac{1}{i\hat{p}_1 + m} \hat{a}_1 \frac{1}{i\hat{p} + m} \quad (8.30)$$

其中 $\hat{a}_n = (a_n) \nu \gamma_\nu$ 。

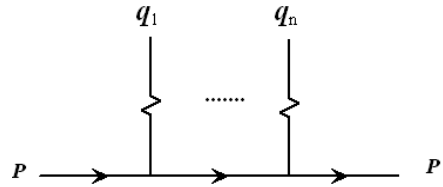


图 8.5: 含有 n 个外线光子

如果在 q_r, q_{r-1} 之间插入一个光子 (如图 8.6)，则可以得到 $n + 1$ 个光子的一般项为

$$\tilde{g}_r = \tilde{g}_r(p, p', q_i, a_i, q) = \frac{1}{i(\hat{p}' + \hat{q}) + m} \hat{a}_n \cdots \hat{a}_{r+1} \frac{1}{i(\hat{p}_r + \hat{q}) + m} \hat{q} \frac{1}{i\hat{p}_r + m} \hat{a}_r \cdots \hat{a}_1 \frac{1}{i\hat{p} + m} \quad (8.31)$$

利用 $i\hat{q} = i(\hat{p} + \hat{q}) + m - (i\hat{p} + m)$ ，可以得到

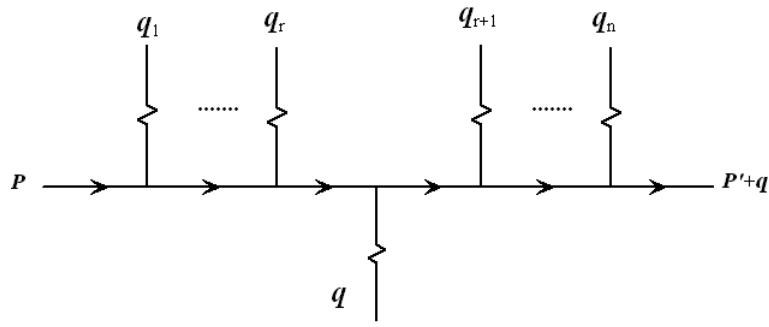


图 8.6: 在含有 n 个外线光子加入一个光子

$$\frac{1}{i(\hat{p} + \hat{q}) + m} i\hat{q} \frac{1}{i\hat{p} + m} = \frac{1}{i\hat{p} + m} - \frac{1}{i(\hat{p} + \hat{q}) + m} \quad (8.32)$$

下面考虑 n+1 个光子的情形，在 n 个光子的情况下，n + 1 个光子的情形如图 8.7 所示。

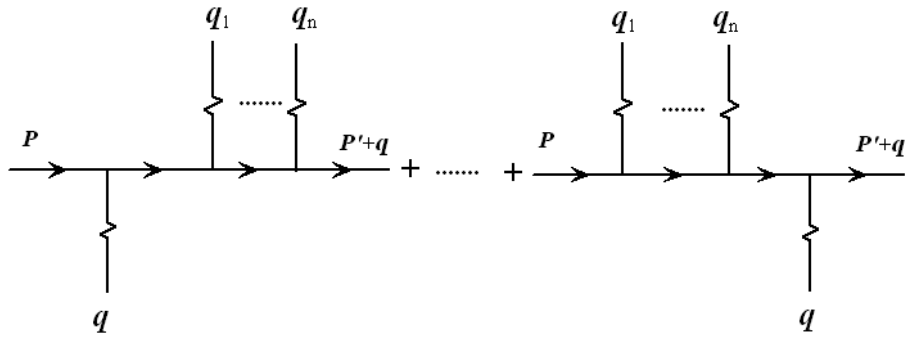


图 8.7: 在含有 n 个外线光子加入一个光子的不同情况

求和可得

$$\begin{aligned} \sum_r \tilde{g}_r(p, p', q_i, a_i, q) &= g(p, p', q_i, a_i) - g(p + q, p' + q, q_i, a_i) \\ &= \frac{1}{i\hat{p}' + m} \hat{a}_n \frac{1}{\hat{p}_{n-1} + m} \hat{a}_{n-1} \cdots \hat{a}_1 \frac{1}{i\hat{p} + m} \\ &\quad - \frac{1}{i(\hat{p}' + \hat{q}) + m} \hat{a}_n \cdots \hat{a}_1 \frac{1}{i(\hat{p} + \hat{q}) + m} \end{aligned} \quad (8.33)$$

把两端的内线换成外线，则

$$\frac{1}{i\hat{p} + m} \rightarrow u(p) \quad \frac{1}{i(\hat{p}' + \hat{q}) + m} \rightarrow \bar{u}(p' + q) \quad (8.34)$$

所以最后，式 (8.33) 变成

$$L_\mu q_\mu \propto \bar{u}(p' + q) \left\{ \lim_{\substack{p^2 \rightarrow -m^2 \\ (p' + q)^2 \rightarrow -m^2}} [i(\hat{p}' + \hat{q}) + m] \sum_r \tilde{g}_r(i\hat{p} + m) \right\} u(p) = 0 \quad (8.35)$$

这中间用到了 $(i\hat{p} + m)u(p) = 0$, $\bar{u}(p' + q)[i(\hat{p}' + \hat{q}) + m] = 0$ ，如果 $p^2 \rightarrow m^2$, $(p' + q)^2 \rightarrow -m^2$ 。

对于环线的情形，如图 8.8 所示。

$$L_\mu q_\mu \propto \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \operatorname{Tr}(\hat{a}_0 \sum_r \tilde{g}_r)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \operatorname{Tr} \hat{a}_0 (g(p, p', q_i, a_i) - g(p + q, p' + q, q_i, a_i)) \quad (8.36)$$

括号中两项的积分差别无非在积分原点的变动 $p \rightarrow p + q, p' \rightarrow p' + q$ ，如果积分是收敛的，移动原点以后，积分值是不变的。从而可以推出式 (8.36) 为零。

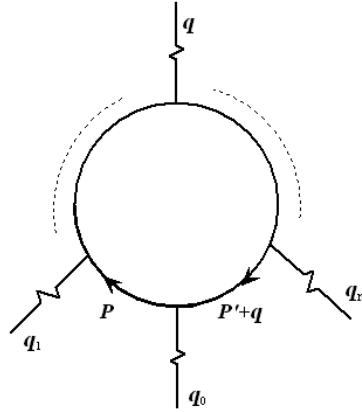


图 8.8: 含有 n 个光子圈中加入一个光子

如果积分是发散的，要求流守恒， $L_\mu q_\mu = 0$ 作为处理发散积分的条件。一般在 $n = 2, n = 4$ 时，积分是发散的。 n 为光子数。

$n = 2$ 时，流守恒的光子极化求和。

$$S \propto L_\mu e_\mu^\lambda \quad (\lambda = 1, 2) \text{ (实光子——横光子)} \quad (8.37)$$

极化条件

$$\sum_{\lambda=1,2} e_i^\lambda(k) e_j^\lambda(k) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (8.38)$$

而在 $\sum_{\lambda=1,2} |T|^2 \propto L_\mu^* L_\nu e_\mu^\lambda e_\nu^\lambda$ ，中间遇到 $\gamma_4 \hat{t}^\dagger \gamma_4$ （不会破坏协变性）， $\gamma_4 \hat{t}^\dagger \gamma_4 = -\hat{t}$ 所以前面 e_μ^λ 无星号。

$\hat{t} = \gamma_\mu e_\mu$ ，对于 1234 度规， $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu$ ，而 $e_\mu^* = e_\mu$ ($\mu = 1, 2, 3$), $e_4^* = -e_4$ ，所以

$$\sum_{\lambda=1,2,3,4} |T|^2 = \sum_{\lambda=1,2,3,4} L_\mu^* L_\nu e_\mu^\lambda e_\nu^\lambda = L_\mu^* L_\nu \delta_{\mu\nu} = L_\mu^* L_\mu \quad (8.39)$$

对于 $\lambda = 3$ 为纵光子， $\lambda = 4$ 为标光子 $\eta = (0, 0, 0, i)$ 。

$$e^{\lambda=3}(k) = -\frac{k + \eta(k\eta)}{(k\eta)} = -\frac{(\mathbf{k}, ik_0) + (\mathbf{0}, i)(-k_0)}{(-k_0)} = \frac{\mathbf{k}, 0}{k_0} = (0, 0, 1, 0) \quad (8.40)$$

$$e^{\lambda=4}(k) = -i\eta \quad (8.41)$$

所以

$$\sum_{\lambda=3,4} |L \cdot e^\lambda(k)| = L^* \cdot e^{\lambda=3}(k) L \cdot e^{\lambda=3}(k) + L^* \cdot e^{\lambda=4}(k) L \cdot e^{\lambda=4}(k)$$

$$\text{因为: } L \cdot k = 0, \rightarrow = (L^* \cdot \eta)(L \cdot \eta) + (L^* \cdot i\eta)(L \cdot i\eta) = 0$$

§8.2.2 流守恒的光子传播函数

$$\underline{A_\mu(x)A_\nu(x')} = \delta_{\mu\nu} D_f(x-x') \quad (8.42)$$

光子内线图 8.9 也可以写成 $j_\mu(k)D_{\mu\nu}(k)j_\nu(k)$ 的形式, 其中流守恒 $j_\mu k_\mu = j_\nu k_\nu = 0$, $D_{\mu\nu}(k)$ 的形式为

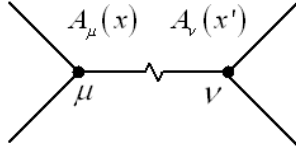


图 8.9: 光子内线

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 - i\epsilon} \left(\delta_{\mu\nu} + \lambda \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \quad (8.43)$$

其中 $\lambda = 0 \rightarrow \text{Feynman Gauge}$; $\lambda = -1 \rightarrow \text{Lorentz Gauge}$ 。

注: Lorentz Gauge

$$\begin{cases} \square A_\mu = -j_\mu \\ < |\partial_\mu A_\mu| > = 0 \end{cases} \quad (8.44)$$

一般情况下, 拉氏量的形式为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{e.m.} + \mathcal{L}_I \\ \mathcal{L}_D &= \bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi \\ \mathcal{L}_{e.m.} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ \mathcal{L}_I &= ej_\mu A_\mu, \quad j_\mu = i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \end{aligned} \quad (8.45)$$

在定域变换下,

$$\begin{cases} A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \\ \psi(x) \rightarrow e^{ie\Lambda(x)}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)e^{-ie\Lambda(x)} \end{cases} \quad (8.46)$$

方程的一般形式为

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = -ej_\nu \quad (8.47)$$

$$\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi + m\psi = 0 \quad (8.48)$$

在 Coulomb Gauge 下, $\nabla \cdots \mathbf{A} = 0$, ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$), 电磁场为横场。从而 $\mathcal{L}$ 中将不含有 A_0 , 即 A_0 不独立。由式 8.47 可得 $\nabla \cdot \mathbf{E} = e\rho$, ($\rho = j_0$), $\nabla \cdot (-\nabla A_0 - \dot{\mathbf{A}}_0) = -\nabla^2 A_0 - \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}}_0 = -\nabla^2 A_0$, 从而可以推得

$$-\nabla^2 A_0 = e\rho \quad (8.49)$$

反解可得

$$A_0(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{e\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (8.50)$$

由场强 $\mathbf{E} = \mathbf{E}^l + \mathbf{E}^t = -\nabla A_0 - \dot{\mathbf{A}}_0 \rightarrow \mathbf{E}^l = -\nabla A_0$ 无旋, $\mathbf{E}^t = -\dot{\mathbf{A}}_0$ 无散 (Coulomb Gauge), 所以

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{e.m.} &= \frac{1}{2} \left[(\mathbf{E}^t)^2 + 2\mathbf{E}^t \cdot \mathbf{E}^l + (\mathbf{E}^l)^2 - \mathbf{B}^2 \right] \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \left[(\mathbf{E}^t)^2 + (\mathbf{E}^l)^2 - \mathbf{B}^2 \right] \end{aligned} \quad (8.51)$$

因为在对空间积分的时候, 点乘项 $\mathbf{E}^t \cdot \mathbf{E}^l$ 积分结果为零。变换的要求是要求拉氏量 $L = \int \mathcal{L} d^3r$ 不变, 所以可以忽略上式中的纵横场点乘项。

正则动量

$$\begin{cases} \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{A}}} = -\mathbf{E}^t \\ p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^\dagger \end{cases} \quad (8.52)$$

哈密顿量密度 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{e.m.} + \mathcal{H}_D + \mathcal{H}_I$, 其中

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_D &= \psi^\dagger (-\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m) \psi \\ \mathcal{H}_{e.m.} &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}^t)^2 + \mathbf{B}^2 \\ \mathcal{H}_I &= -e j_\mu A_\mu - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^l)^2 = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{A} + \mathcal{H}_{coul.}, \quad \mathcal{H}_{coul.} = e\rho A_0 - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^l)^2 \end{aligned}$$

进一步有

$$\begin{aligned} H_{coul.} &= \int \mathcal{H}_{coul.} d^3r = \int \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{E}^l)^2 \right) d^3r + \int e\rho A_0 d^3r \\ &= \frac{1}{2} \int e\rho A_0 d^3r \end{aligned} \quad (8.53)$$

因为

$$\int \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{E}^l)^2 \right) d^3r = -\frac{1}{2} \int \nabla A_0 \cdot \nabla A_0 d^3r = \frac{1}{2} \int A_0 \nabla^2 A_0 d^3r = -\frac{1}{2} \int A_0 e\rho d^3r$$

引入对易关系 (与 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 一致),

$$\begin{aligned} [\pi_i(\mathbf{x}, t), A_j(\mathbf{x}', t)] &= -i \left(\delta_{ij} - \frac{\nabla_i \nabla_j}{\nabla^2} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \left\{ \psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}', t) \right\} &= i\delta_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (8.54)$$

对于自由场, 则有

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \left[\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right] \quad (8.55)$$

由 Coulomb Gauge $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 可以推出

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (8.56)$$

其中对于二重极化, 有

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}} = \mathbf{e}_1(k) a_k^{(1)} + \mathbf{e}_2(k) a_k^{(2)} \quad (8.57)$$

Feynman 图如图 8.10。

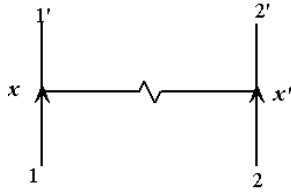


图 8.10: 电子 - 电子散射

图中的贡献可以分为两项

$$\begin{aligned} \text{第一项} &= -i \int H_{coul} dt = -\frac{i}{2} \int \frac{e^2}{4\pi} \rho(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}', t) \frac{d^3 r d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dt \\ &= \frac{i}{2} \int \frac{e^2}{4\pi} j_4(x) j_4(x') \frac{\delta(t - t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^4 x d^4 x' \end{aligned} \quad (8.58)$$

$$\text{第二项} = \frac{(-i)^2}{2!} \int T \left(e^2 \mathbf{j}(x) \underline{\mathbf{A}(x) \mathbf{j}(x') \mathbf{A}(x')} \right) d^4 x d^4 x' \quad (8.59)$$

$$\text{两项之和} = \frac{(-i)^2}{2!} \int e^2 T \left(j_\mu(x) D_{\mu\nu}^{Coul.}(x - x') j_\nu(x') \right) d^4 x d^4 x' \quad (8.60)$$

其中

$$D_{\mu\nu}^{Coul.}(x - x') = \begin{cases} \int D_{ij}^t(x - x') = \frac{A_i(x) A_j(x')}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} & i, j = 1, 2, 3 \\ \frac{-i\delta(t-t')}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} & \mu = \nu = 4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (8.61)$$

其动量表象为

$$D_{\mu\nu}^{Coul.}(k) = \int D_{\mu\nu}^{Coul.}(x) e^{-ikx} d^4 x = \begin{cases} \frac{-i}{k^2 - i\epsilon} (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}) & \mu = i, \nu = j = 1, 2, 3 \\ \frac{-i}{k^2} & \mu = \nu = 4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (8.62)$$

其中上面 $\mu = \nu = 4$ 是非物理纵光子和标光子贡献（相当于）瞬时库仑作用。

$$\begin{aligned} a_\mu D_{\mu\nu}^{Coul.}(k) b_\nu &= -i \left[\frac{1}{k^2} \left(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b})}{k^2} \right) - \frac{a_0 b_0}{k^2} \right] \\ &= -i \left[\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{k^2} - \frac{a_0 b_0}{k^2} \left(\frac{k_0^2}{k^2} + 1 \right) \right] \\ &= \frac{-i}{k^2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - a_0 b_0) = a_\mu D_{\mu\nu}^{Lorentz} b_\nu \end{aligned} \quad (8.63)$$

这中间利用了流守恒 $a_\mu k_\mu = 0, \mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = k_0 a_0, \mathbf{k} \cdot \mathbf{b} = k_0 b_0$ 。

上面通过

$$\frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2} \rightarrow \frac{1}{k^2} (\delta_{\mu\nu} + k_\mu x_\nu + k_\nu x_\mu) \quad (8.64)$$

实现了

$$D_{\mu\nu}^{Lorentz} \rightarrow D_{\mu\nu}^{Coul.} \quad (8.65)$$

的变换。

§8.3 几个典型的衰变和散射过程

§8.3.1 π 介子的弱衰变

四费米子相互作用的等效的拉氏量为

$$\mathcal{L}_I = ig_\pi \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{\psi}_l \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_l} \underline{\partial_\lambda \varphi} + h.c. \quad (8.66)$$

弱流形式为 (V - A 理论) $\bar{\psi}_1 \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_2 \bar{\psi}_3 \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_4$, 代表轻子 (特别是忽略质量后) 是左手系的。

先看一下 Dirac 场的拉氏量

$$-\mathcal{L} = \bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi \quad (8.67)$$

其中 Dirac Spinor 可以分成两个部分

$$\psi = \psi_L + \psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi + \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi \quad (8.68)$$

所以, 拉氏量的形式为

$$-\mathcal{L} = \bar{\psi}_L (\gamma_\mu \partial_\mu) \psi_L + \bar{\psi}_R (\gamma_\mu \partial_\mu) \psi_R + m (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) \quad (8.69)$$

其中标量密度 $\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L$, 如果 $m = 0$, 则 $\mathcal{L}$ 变成左手和右手独立两部分。如果 $m \neq 0$, 则左右手耦合, 从而没有手征对称性。

这中间 $\bar{\psi}_L \gamma_\mu \psi_R = \bar{\psi}_R \gamma_\mu \psi_L = 0$, 这里定义场为 $\psi_L \triangleq \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi$, Helicity 为 -1 的场。Helicity 定义为

$$h = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad (8.70)$$

其中

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} = -i\gamma_5 \gamma_4 \boldsymbol{\gamma} \quad \boldsymbol{\gamma} = -i\beta \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (8.71)$$

在 1234 度规下,

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma} = -\gamma_5 \boldsymbol{\alpha} \quad (8.72)$$

Dirac Spinor 满足

$$(i\hat{p} + m)u(p) = 0 \quad \text{如果 } m = 0 \rightarrow i\hat{p}u(p) = 0 \rightarrow (i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + i \cdot iE\gamma_4)u(p) = 0 \quad (8.73)$$

从而有

$$i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} u(p) = E\gamma_4 u(p) = |\mathbf{p}|\gamma_4 u(p) \quad (8.74)$$

所以

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p})u(p) &= (-i\gamma_5 \gamma_4 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p})u(p) \\ &= -\gamma_5 \gamma_4 |\mathbf{p}|\gamma_4 u(p) = -\gamma_5 |\mathbf{p}|u(p) \end{aligned} \quad (8.75)$$

$$(\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p})\gamma_5 u(p) = (-i\gamma_5 \gamma_4 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p})\gamma_5 u(p) = -i\gamma_4 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} u(p) = -|\mathbf{p}|u(p) \quad (8.76)$$

从而可以得到

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} u(p) = -\gamma_5 u(p) \quad \boldsymbol{\Sigma} \cdot \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \gamma_5 u(p) = -u(p) \quad (8.77)$$

所以得到 Helicity 的意义所在

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} (1 + \gamma_5) u(p) = -(1 + \gamma_5) u(p) \rightarrow hu_L = -u_L, u_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) u(p) \quad (8.78)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} (1 - \gamma_5) u(p) = (1 - \gamma_5) u(p) \rightarrow hu_R = u_R, u_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) u(p) \quad (8.79)$$

附：对于 0123 度规,

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \text{ 东海岸} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \text{ 西海岸} \quad (8.80)$$

假定中微子 ($m_\nu = 0$), 则 $\frac{1}{\sqrt{V}} u_r e^{ikx}$ (一般为 $\frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E}} u_r(k) e^{ikx}$,

$$u_r(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_r \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \xi_r \end{pmatrix} \quad \text{一般的} \frac{E+m}{2\omega} \begin{pmatrix} \xi_m \\ \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \xi_r \end{pmatrix} \quad (8.81)$$

引入

$$\begin{aligned} \Lambda_+(k) &= \sum_r u_r(k) \bar{u}_r(k) = \frac{-i\hat{k}}{2|\mathbf{k}|} & (\Lambda_+(k) &= \frac{m - i\hat{k}}{2m}) \\ \Lambda_-(k) &= -\sum_r v_r(k) \bar{v}_r(k) = \frac{i\hat{k}}{2|\mathbf{k}|} & (\Lambda_-(k) &= \frac{m + i\hat{k}}{2m}) \end{aligned} \quad (8.82)$$

考虑 π^- 介子的衰变图 8.11,

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad k = q + p \quad (8.83)$$

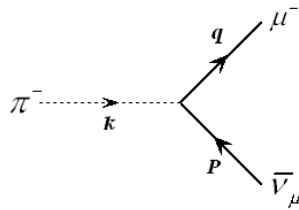


图 8.11: π^- 介子衰变 $\pi^- \rightarrow \mu + \bar{\nu}_\mu$

相应的 S 矩阵元为:

$$\begin{aligned} \langle q, p | S | k \rangle &= -i \int d^4x \langle q, p | N(H_I(x)) | k \rangle \\ &= -g_\pi \sqrt{\frac{m_\mu}{E_\mu}} \sqrt{\frac{1}{2\omega_k}} \frac{1}{V^{3/2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k - q - p) i k_\lambda \bar{u}(q) \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) v(p) \end{aligned} \quad (8.84)$$

而

$$\begin{aligned} \bar{u}(q) \hat{k} (1 + \gamma_5) v(p) &= \bar{u}(q) (\hat{q} + \hat{p}) (1 + \gamma_5) v(p) \\ &= i m_\mu \bar{u}(q) (1 + \gamma_5) v(p) \end{aligned} \quad (8.85)$$

这中间用到关系

$$\bar{u}(q)(i\hat{q} + m_\mu) = 0 \quad i\hat{p}(v(p)) = 0 \quad (8.86)$$

为了得到 $|T'|^2$ ，则

$$(2m_\mu 2E_p)^{1/2} \langle q, p | T' | k \rangle = -g_\pi i m_\mu \bar{u}(fq)(1 + \gamma_5)v(q) \quad (8.87)$$

所以

$$\begin{aligned} (2m_\mu 2E_p)^{-1} |T'|^2 &= \text{tr} \left[(1 + \gamma_5) \frac{-i\hat{p}}{2|\mathbf{p}|} \gamma_4 (1 + \gamma_5) \gamma_4 \frac{m_\mu - i\hat{q}}{2m_\mu} \right] \\ &= g_\pi^2 m_\mu^2 \text{Tr} \left[(1 + \gamma_5)^2 \frac{-i\hat{p}}{2|\mathbf{p}|} \frac{m_\mu - i\hat{q}}{2m_\mu} \right] \\ &= 2g_\pi^2 m_\mu^2 \text{Tr} \left((1 + \gamma_5) \frac{-i\hat{p}}{2|\mathbf{p}|} \frac{m_\mu - i\hat{q}}{2m_\mu} \right) \\ &= 2g_\pi^2 m_\mu^2 \frac{(-1)}{2|\mathbf{p}|2|m_\mu|} \text{Tr}[\hat{p}\hat{q}] \\ &= g_\pi^2 m_\mu^2 \frac{1}{2|\mathbf{p}|2|m_\mu|} (-8)(pq), \quad \text{Tr}(\hat{a}\hat{b}) = 4ab \\ &= g_\pi^2 m_\mu^2 \frac{1}{2|\mathbf{p}|2|m_\mu|} \cdot 4 \cdot (m_\pi^2 - m_\mu^2) \end{aligned} \quad (8.88)$$

这是因为

$$2pq = (p + q)^2 - p^2 - q^2 = -m_\pi^2 + m_\mu^2 \quad (8.89)$$

所以在两体相空间中,

$$|T'|^2 = 4g_\pi^2 m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2) \quad (8.90)$$

衰变的总宽度

$$\begin{aligned} \Gamma = \frac{1}{2M} \int |T'|^2 dLIPS &= \frac{1}{2M} (2\pi)^4 \int |T'|^2 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \cdot \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \\ &= \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^6} \frac{1}{2M} \int |T'|^2 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p) \frac{d^3 p_1}{2E_1} \cdot \frac{d^3 p_2}{2E_2} \quad \text{静止系} \end{aligned} \quad (8.91)$$

由于整个表达式具有 Lorentz 不变性, 所以选择质心系 ($\mathbf{p} = 0$), 则

$$\begin{cases} \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0, \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{C.M.} \\ E_1 + E_2 = \sqrt{|\mathbf{p}_{C.M.}|^2 + m_1^2} + \sqrt{|\mathbf{p}_{C.M.}|^2 + m_2^2} = M \end{cases} \quad (8.92)$$

从而可以推出

$$|\mathbf{p}_{C.M.}|^2 = \frac{1}{4M^2} [M^2 - (m_1 + m_2)^2] [M^2 - (m_1 - m_2)^2], \quad |\mathbf{p}_{C.M.}| = k \quad (8.93)$$

在两体相空间中,

$$\begin{aligned} R_2 &= \int \frac{d^3 p_1}{2E_1} \frac{d^3 p_2}{2E_2} \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p) = \frac{d^3 p_1}{4E_1 E_2} \delta(E_1 + E_2 - p_0) \\ \text{利用 } \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{k} &\xrightarrow{C.M.} \int d\Omega \int \frac{k^2 dk}{4\sqrt{k^2 + m_1^2} \sqrt{k^2 + m_2^2}} \delta(\sqrt{k^2 + m_1^2} + \sqrt{k^2 + m_2^2} - M) \end{aligned} \quad (8.94)$$

令 $x = \sqrt{k^2 + m_1^2} + \sqrt{k^2 + m_2^2}$, 则

$$\frac{dx}{dk} = \frac{k\sqrt{k^2 + m_1^2} + k\sqrt{k^2 + m_2^2}}{\sqrt{k^2 + m_1^2} + \sqrt{k^2 + m_2^2}} = \frac{kx}{\sqrt{k^2 + m_1^2} + \sqrt{k^2 + m_2^2}} \quad (8.95)$$

从而推出

$$R_2 = \int \frac{d\omega}{4} \int \frac{kdx}{x} \delta(x - M) = \pi \frac{1}{M} |\mathbf{p}_{C.M.}| \quad (8.96)$$

所以总的衰变宽度为

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2M} \frac{1}{(2\pi)^2} \int |T'|^2 \frac{d^3 p_1}{2E_1} \frac{d^3 p_2}{2E_2} \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p) \quad \text{角度相关 (极化相关)} \\ &= \frac{1}{2M(2\pi)^2} \left(\int |T'|^2 d\Omega \right) \frac{1}{4M} |\mathbf{p}_{C.M.}| \\ &= \frac{|\mathbf{p}_{C.M.}|}{8\pi M^2} \overline{|T'|^2}, \quad \overline{|T'|^2} = \frac{1}{4\pi} \int |T'|^2 d\Omega \end{aligned} \quad (8.97)$$

由于 $\pi \rightarrow \mu \bar{n}_\mu$, 所以 $|\mathbf{p}_{C.M.}| = (m_\pi^2 - m_\mu^2)/(2m_\pi)$, 所以最后, 衰变总宽度为

$$\Gamma = \frac{|\mathbf{p}_{C.M.}|}{8\pi M_\pi^2} 4g_\pi^2 m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2) = \frac{g_\pi^2}{4\pi} m_\pi m_\mu^2 \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2} \right)^2 \quad (8.98)$$

而对于 $\pi \rightarrow e \bar{\nu}_e$, 由于 $m_e \ll m_\mu$ ($m_e = 0.511 MeV, m_\mu = 105.66 MeV$), 所以

$$\Gamma(\pi \rightarrow \mu \bar{n}_\mu) \gg \Gamma(\pi \rightarrow e \bar{\nu}_e) \quad (8.99)$$

$m_{\pi^\pm} = 139.6 MeV$, 实验测得的结果为

$$\frac{\Gamma_{\pi \rightarrow e \bar{\nu}_e}}{\Gamma_{\pi \rightarrow \mu \bar{n}_\mu}} = (1.2675 \pm 0.023) \times 10^{-4} \quad (8.100)$$

为了考虑轻子普适性, 我们来看一看 τ 轻子的情况。(如图 8.12)

$$\tau^- \rightarrow \pi^- + \nu_\tau \quad (8.101)$$

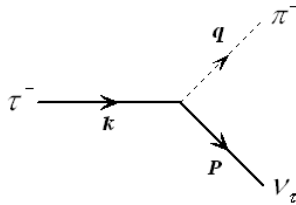


图 8.12: τ^- 轻子衰变 $\tau^- \rightarrow \pi^- + \nu_\tau$

拉氏量为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I &= ig_\pi \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{\psi}_l \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_l} \partial_\lambda \varphi + h.c. \\ &= ig_\pi \sum_{l=e,\mu,\tau} [\bar{\psi}_l \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_l} \partial_\lambda \varphi + \bar{\psi}_{\nu_l} \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \psi_l \partial_\lambda \varphi^\dagger] \end{aligned} \quad (8.102)$$

能量守恒 $q = k + p$, 衰变的总宽度为 (注意和前面 $\pi \rightarrow \mu + \bar{\nu}_\mu$ 区别, 这里要对初态和末态的极化求和)

$$\begin{aligned}
\Gamma(\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau) &= \frac{|\mathbf{p}_{C.M.}|}{8\pi M_\tau^2} \frac{1}{2} \sum_{pol.} |T'|^2 \\
&= \frac{1}{8\pi M_\tau^2} \left(\frac{M_\tau^2 - M_\pi^2}{2M_\tau} \right) \cdot 2g_\pi^2 M_\tau^2 (M_\tau^2 - M_\pi^2)
\end{aligned} \tag{8.103}$$

如果有 e, μ, τ 轻子普适性, 则

$$\Gamma(\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau) = \frac{g_\pi^2}{4\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{(M_\tau^2 - M_\pi^2)^2}{M_\tau} \right) = \tag{8.104}$$

即 g_π 对不同的轻子是一样的。

理论计算的结果为

$$\frac{\Gamma_{\tau \rightarrow \pi \nu_\tau}}{\Gamma_{\pi \rightarrow \mu \bar{\nu}_\mu}} = 0.9747 \times 10^4, \quad (M_\tau = 1777.05 MeV) \tag{8.105}$$

实验结果为

$$\frac{\Gamma_{\tau \rightarrow \pi \nu_\tau}}{\Gamma_{\pi \rightarrow \mu \bar{\nu}_\mu}} = 0.994 \times 10^4, \quad (T(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu) \simeq T_{total}(\pi) = \frac{1}{\tau_\pi}) \tag{8.106}$$

从而很可能有三代轻子的普适性。

练习: 其它的衰变过程。

1. $0^- \rightarrow 1^- + 1^-$, 其中一个末态为 γ , 写出有效相互作用拉氏量 (电磁作用满足宇称守恒, 并要求满足规范不变)。

2. $1^- \rightarrow 1^- + 1^-$ (其中有一个末态为 γ)

3. $1^- \rightarrow 0^+ + 1^-$ (末态 1^- 为 γ)

(赝) 标量场 φ , 矢量场 $(m \neq 0)G_\mu$, 光子场 A_μ

4. u, v 关系

$$\psi \rightarrow \psi^C = \mathbf{C}\psi\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\tilde{\psi}, \quad \mathbf{C} = \gamma_2\gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.107}$$

$\mathbf{C}C_r(\mathbf{p})\mathbf{C}^{-1} = d_r(\mathbf{p}), \mathbf{C}d_r(\mathbf{p})\mathbf{C}^{-1} = C_r(\mathbf{p})$ 则 $v_r(p) = \mathbf{C}\tilde{u}_r(p), u_r(p) = \mathbf{C}\tilde{v}_r(p)$ 这个条件规定了 u, v 相角。

$$u_r(p) = \begin{pmatrix} \varphi_r \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \varphi_r \end{pmatrix} \quad v_r(p) = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix} \tag{8.108}$$

证明:

$$u_r(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} \chi_r \quad v_r(p) = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_r \tag{8.109}$$

注意通常,

$$\chi_{r=1}^\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi_{r=2}^\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.110}$$

由于 $\sigma_2 \sigma_2^* = -I$, 所以

$$\uparrow i\sigma_2 \chi_{r=1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \downarrow i\sigma_2 \chi_{r=2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.111}$$

5. 如果

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ i\sigma_2 \chi^* \end{pmatrix} \quad (8.112)$$

则有 $\psi_{\mathbf{C}} = \psi$ 。

§8.4 几种基本的发散过程及相关的数学处理

§8.4.1 几种基本的发散

1. 电子自能 (如图 8.13)

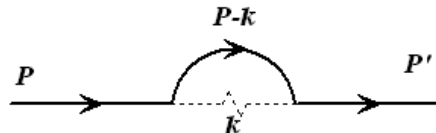


图 8.13: 电子自能图

$$\langle p' r' | S^{(2)} | p, r \rangle = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{m^2}{EE'}} \bar{u}_r(p') \Sigma^{(2)} u_r(p) \delta^4(p - p') \quad (8.113)$$

其中线性发散的量为

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2)} &= e^2 \int d^4 k \gamma_\mu \frac{i(\hat{p} - \hat{k}) - m}{(p - k)^2 + m^2} \gamma_\mu \frac{1}{k^2} \\ &= -2e^2 \int d^4 k \frac{1}{k^2} \frac{i(\hat{p} - \hat{k}) + 2m}{(p - k)^2 + m^2} \end{aligned} \quad (8.114)$$

2. 光子的真空极化 (如图 8.14)

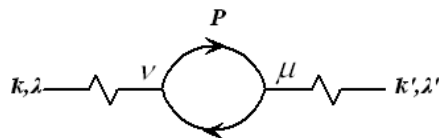


图 8.14: 光子真空极化图

$$\langle k' \lambda' | S^{(2)} | k \lambda \rangle = \frac{1}{V} \frac{1}{2\omega} \delta^4(k - k') e_\mu^{\lambda'}(k) \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) e_\nu^\lambda(k) \quad (8.115)$$

其中

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = e^2 \int d^4 p \text{Tr} \left[\gamma_\mu \frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2} \gamma_\nu \frac{i(\hat{p} - \hat{k}) - m}{(p - k)^2 + m^2} \right] \quad (8.116)$$

注意在这中间利用了

$$\frac{1}{i\hat{p} + m} = \frac{-i\hat{p} + m}{p^2 + m^2} \quad (8.117)$$

其中 $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)$ 连接外线光子时 $k^2 = 0$ ，连接内线光子 $k^2 \neq 0$ 。这样的积分一个二次发散的积分，但是实际上是一个对数发散的积分。

3. 顶角的发散 (如图 8.15)

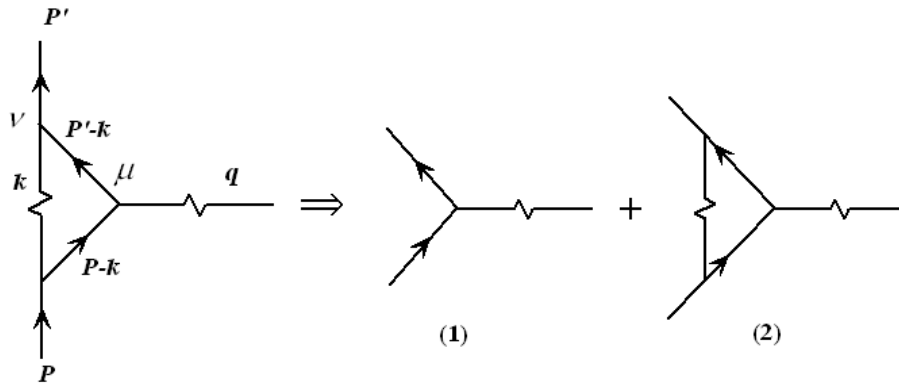


图 8.15: 顶角发散图

先看一阶近似即图 (1)

$$\langle f | S^{(1)} | i \rangle = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{m^2}{EE'}} (-e) (2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q) \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \alpha_\mu(q) \quad (8.118)$$

而

$$\langle f | S^{(3)} = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{m^2}{EE'}} (-e) (2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q) \bar{u}(p') \Lambda^{(2)}(p, p') u(p) \alpha_\mu(q) \quad (8.119)$$

其中对数发散相为:

$$\Lambda^{(2)}(p, p') = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2} \gamma_\nu \frac{i(\hat{p}' - \hat{k}) - m}{(p' - k)^2 + m^2} \gamma_\mu \frac{i(\hat{p} - \hat{k}) - m}{(p - k)^2 + m^2} \gamma_\nu \quad (8.120)$$

并且

$$\alpha_\mu \rightarrow \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e_\mu^\lambda(q) \quad (8.121)$$

§8.4.2 Feynman 积分和 Wick 转动

如图 8.16, 积分

$$\int d^4k = \int d^3k \int dk_0 \quad (8.122)$$

其中对于 k_0 的积分路径为图 8.16 中所示。首先大圆上的积分肯定为零。另外由于整个积分路径中不包含奇点, 所以总积分为零。那么沿实轴的积分就化成了沿虚轴的积分。即所谓的 Wick 转动 (从明可夫斯基空间到欧几里空间的转变)。

$$I \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 f(k^2 - k_0^2) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} dk_0 f(k^2 - k_0^2) \quad (8.123)$$

如果令 $k_0 = ik'_0$, 则由于 $k_0 : (-i\infty, +i\infty), k'_0 : (-\infty, +\infty)$,

$$I = i \int_{-\infty}^{+\infty} dk'_0 f(k^2 + k'^2_0) \stackrel{k'_0 \rightarrow k_0}{=} i \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 f(k^2 + k_0^2) \quad (8.124)$$

通过 Wick 转动以后, 宗量 $k^2 - k_0^2 \rightarrow k^2 + k_0^2$ 从而宗量实现正定。

例如: 求积分

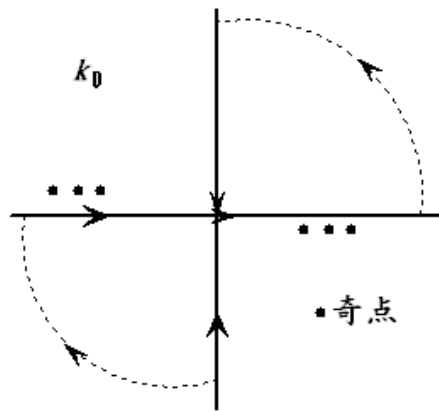


图 8.16: 积分路径示意图

$$\begin{aligned}
 J_n &= \int d^4k \frac{1}{(k^2 + a^2)^n} \quad n \geq 3 \\
 &= \int d\mathbf{k} \int dk_0 \frac{1}{(k^2 - k_0^2 + a^2)^n} \\
 \text{Wick 转动后} &\rightarrow i \int d\mathbf{k} \int dk_0 \frac{1}{(k^2 + k_0^2 + a^2)^n}
 \end{aligned} \tag{8.125}$$

最后 (k^2 欧几里空间的 4 - 矢量的模方 (长度平方))

$$J_n = i \int d\mathbf{k} dk_0 \frac{1}{(k^2 + a^2)^n} \quad k^2 = k_0^2 + \mathbf{k}^2 \tag{8.126}$$

四维球坐标

$$\begin{cases} k_0 = K \cos \phi & K : 0 \rightarrow \infty \\ k_3 = K \sin \phi \cos \theta & \phi : 0 \rightarrow \pi \\ k_2 = K \sin \phi \sin \theta \sin \varphi & \theta : 0 \rightarrow \pi \\ k_1 = K \sin \phi \sin \theta \cos \varphi & \varphi : 0 \rightarrow 2\pi \end{cases} \tag{8.127}$$

微分关系

$$d^4k = K^3 dK d\phi \sin \theta d\theta \sin^2 \phi d\phi \tag{8.128}$$

如果被积函数与角度无关, 只与模方有关, 如前例

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\pi \sin^2 \phi d\phi = 2\pi^2 \tag{8.129}$$

所以有

$$J_n = i2\pi^2 \int_0^\infty \frac{k^3 dk}{(k^2 + a^2)^n} = \frac{i\pi^2}{(n-1)(n-2)a^{2(n-2)}} \tag{8.130}$$

§8.4.3 发散积分与原点移动

$$\text{公式一} \quad \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \frac{1}{F^n} \tag{8.131}$$

其中 Feynman 参数为

$$F = a_1 x_{n-1} + a_2(x_{n-2} - x_{n-1}) + \cdots + a_n(1 - x_1) \quad (8.132)$$

证明: 当 $n = 2$ 时,

$$\frac{1}{a_1 a_2} = \frac{1}{a_2 - a_1} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) = \frac{1}{a_2 - a_1} \int_{a_1}^{a_2} \frac{dz}{z^2} \quad (8.133)$$

而 $z = a_1 x + a_2(1 - x)$, 所以该式在 $n = 2$ 的时候成立。

假定 $m = n - 1$ 的时候成立, 进一步证明 $m = n$ 时也成立。当 $m = n$ 时,

$$\begin{aligned} & (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \frac{1}{[a_1 x_{n-1} + a_2(x_{n-2} - x_{n-1}) + \cdots + a_n(1 - x_1)]^n} \\ &= (n-2)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} \frac{(n-1)d[(a_1 - a_2)x_{n-1}]}{a_1 - a_2} \frac{1}{[a_1 - a_2)x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_n(1 - x_1)]^n} \\ &= (n-2)! \frac{1}{a_2 - a_1} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-3}} dx_{n-2} \\ & \quad \left[\frac{1}{[a_1 - a_2)x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_n(1 - x_1)]^{n-1}} \right]_{x_{n-1}=0}^{x_{n-1}=x_{n-2}} \\ &= (n-2)! \frac{1}{a_2 - a_1} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-3}} dx_{n-2} \\ & \quad \left[\frac{1}{[a_1 x_{n-2} + \cdots + a_n(1 - x_1)]^{n-1}} - \frac{1}{[a_2 x_{n-2} + \cdots + a_n(1 - x_1)]^{n-1}} \right] \end{aligned} \quad (8.134)$$

因为 $m = n - 1$ 时, 成立, 所以

$$\frac{1}{a_2 - a_1} \left[\frac{1}{[a_1 x_{n-2} + \cdots + a_n(1 - x_1)]^{n-1}} - \frac{1}{[a_2 x_{n-2} + \cdots + a_n(1 - x_1)]^{n-1}} \right] = \frac{1}{a_1 a_2 \cdot a_n} \quad (8.135)$$

公式二
$$\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} = \int_0^1 \frac{n(\beta - \alpha)}{[\alpha z + \beta(1 - z)]^{n+1}} dz \quad (8.136)$$

公式三 操作用在

$$\int d^4 k \frac{1}{[(k-b)^2 + a^2]^n} \xrightarrow{\text{化成}} \int d^4 k \frac{1}{(k^2 + a^2)^n} \quad (8.137)$$

取两者的差比较是否等于零。

对数发散积分移动原点数值不变。

$$I = \int_{-m}^m f(x) dx, I' = \int_{-m}^m f(x+a) dx = \int_{-m+a}^{m+a} f(x) dx \quad (8.138)$$

移动原点后

$$I - I' = \int_{-m}^{-m+a} f(x) dx - \int_m^{m+a} f(x) dx \quad (8.139)$$

如果对数发散, 则 $f(x) \rightarrow 1/x$,

$$\int_m^{m+a} f(x) dx \rightarrow \int_m^{m+a} \frac{1}{x} dx = \ln \frac{m+a}{m} \rightarrow 0 \quad (\text{When } m \rightarrow \text{infy}) \quad (8.140)$$

现在来证明这个结论对于四度积分也是对的。对数发散积分

$$I_1 = \int d^4k \frac{1}{[(k-b)^2 + a^2]^2} \quad (8.141)$$

则

$$\begin{aligned} \Delta I_1 &= \int d^4k \frac{1}{[(k-b)^2 + a^2]^2} - \int d^4k \frac{1}{(k^2 + a^2)^2} \\ &= 2 \int d^4k \int_0^1 dz \frac{2(bk) - b^2}{\{(k-c)^2 + d^2\}^3} \\ k-c \rightarrow k &= 2 \int_0^1 dz \int d^4k \frac{1(bk) + 2(bc) - b^2}{(k^2 + d^2)^3} \end{aligned} \quad (8.142)$$

其中 $c = bz$, $d^2 = a^2 + b^2z(1-z)$ 。所以最后

$$\begin{aligned} \Delta I_1 &= i\pi^2 \int_0^1 dz \frac{2(bc) - b^2}{d^2} = i\pi^2 \int_0^1 dz \frac{b^2(2z-1)}{a^2 + b^2z(1-z)} \\ &= -i\pi \ln(a^2 + b^2z(1-z))|_0^1 = 0 \end{aligned} \quad (8.143)$$

所以对数发散的情形可以移动原点，其改变量为零，或者增量为零。

公式四 线性发散积分 I_2 移动原点后，只发生有限的改变。

$$I_2 = \int d^4k \frac{k_\mu}{\{(k-b)^2 + a^2\}^2} \quad (8.144)$$

移动原点 $k-b \rightarrow k$ 后，则原来的 $k \rightarrow k+b$ 。改变量为

$$\begin{aligned} \Delta I_2 &= \int d^4k \frac{k_\mu}{\{(k-b)^2 + a^2\}^2} - \int d^4k \frac{k_\mu + b_\mu}{\{k^2 + a^2\}^2} \\ &= - \int d^4k \frac{b_\mu}{\{k^2 + a^2\}^2} + 2 \int d^4k \int_0^1 dz \frac{2k_\mu(bk) - b^2k_\mu}{\{(k-c)^2 + d^2\}^3}, \quad \left(\begin{array}{l} c = bz \\ d^2 = a^2 + b^2z(1-z) \end{array} \right) \end{aligned} \quad (8.145)$$

处理上式中的第二项（对数发散项），移动原点 $k-c \rightarrow k$ ，则可得到

$$\text{式 8.145 第二项} = 2 \int d^4k \int_0^1 dz \frac{2(k_\mu + c_\mu)(b, k+c) - b^2(k_\mu + c_\mu)}{\{k^2 + d^2\}^3} \quad (8.146)$$

从这可以看出，分子为 k 的奇次的对积分没有贡献，所以

$$\text{式 8.146} = 2 \int d^4k \int_0^1 dz \frac{1/2 b_\mu k^2 + b_\mu b^2(2z-1)z}{\{k^2 + d^2\}^3} \quad (8.147)$$

注意 $(bk) = b_\nu k_\nu$ ，乘上 k_μ 后出现 $k_\mu k_\nu$ 项，如果 $\mu \neq \nu$ ，对积分无贡献：

$$\int d^4k \frac{k_\mu k_\nu}{\{k^2 + d^2\}^3} \xrightarrow{\mu=\nu} \frac{1}{4} \int d^4k \frac{k^2}{\{k^2 + d^2\}^3} \quad (k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) \quad (8.148)$$

另外，在上式中：

$$\begin{aligned} 2 \int d^4k \int_0^1 dz \frac{b_\mu b^2(2z-1)}{\{k^2 + d^2\}^3} &= \int d^4k \int_0^1 d \left[\frac{b_\mu}{\{k^2 + d^2\}^2} \right] z \\ &= \int d^4k \frac{k_\mu}{(k^2 + a^2)^2} - \int d^4k \int_0^1 \frac{b_\mu dz}{\{k^2 + d^2\}^2} \end{aligned} \quad (8.149)$$

所以，最后

$$\begin{aligned}
\Delta I_2 &= \int d^4k \int_0^1 dz \frac{b_\mu k^2}{\{k^2 + d^2\}^3} - \int d^4k \int_0^1 dz \frac{b_\mu}{\{k^2 + d^2\}^2} \\
&= -b_\mu \int d^4k \int_0^1 dz \frac{d^2}{\{k^2 + d^2\}^3} = -b_\mu \int_0^1 dz d^2 \int d^4k \frac{1}{\{k^2 + d^2\}^3} \\
&= -b_\mu \int_0^1 dz d^2 \left(\frac{i\pi^2}{2d^2} \right) = -\frac{i}{2}\pi^2 b_\mu
\end{aligned} \tag{8.150}$$

从而证明了线性发散条件下的积分移动原点有一个有限的改动 ΔI_2 。

§8.5 电子自能和质量重整化

电子自能图为图 8.13，电子自能可能引起电荷和质量重整化。

$$\Sigma^{(2)}(p) = -2e^2 \int d^4k \frac{1}{k^2} \frac{i(\hat{p} - \hat{k}) + 2m}{(p - k)^2 + m^2} \tag{8.151}$$

利用

$$\frac{1}{a_1 a_2} = \int_0^1 dx \frac{1}{(a_1 x a_2 (1 - x))^2} \tag{8.152}$$

令 $a_1 = (p - k)^2 + m^2, a_2 = k^2$ 后,

$$\Sigma^{(2)}(p) = -2e^2 \int d^4k \int_0^1 dx \frac{i(\hat{p} - \hat{k}) + 2m}{\{(k - px)^2 + l^2\}^2} \quad (l^2 = m^2 x^2 + (p^2 + m^2)(1 - x)x) \tag{8.153}$$

这是一个线性发散的积分，所以移动原点后可以得到

$$\Sigma^{(2)}(p) = \frac{\pi^2 e^2}{2} \hat{p} - 2e^2 \int d^4k \int_0^1 dx \frac{i\hat{p}(1 - x) + 2m - i\hat{k}}{(k^2 + l^2)^2} \tag{8.154}$$

通常，我们都习惯于将 $\Sigma^{(2)}(p)$ 作泰勒展开

$$\Sigma^{(2)}(p) = \Sigma^{(2)}(p) \Big|_{\hat{p}=im} + \frac{\partial \Sigma^{(2)}(p)}{\partial \hat{p}} \Big|_{\hat{p}=im} (\hat{p} - im) + \dots \tag{8.155}$$

对比 $\Sigma^{(2)}(p)$ 的表达式 (8.151)，可以看出对 $\hat{p}$ 的微商会使得分母的次数增加，从而展开式中的发散度是逐渐降低的，以至于到某一项系数不再是发散的。

如果 $\hat{p}$ 是一个真正的外线，则 $\hat{p} = im$ 成立，则散射矩阵的形式为 $\bar{u}(p)\Sigma^{(2)}(p)u(p)$ 。一般情况下， $\hat{p}$ 是一个任意的值（内线）。

当 $\hat{p}$ 是外线时（注意式 (8.154) 中的 $\hat{k}$ 对积分没有贡献），

$$\Sigma^{(2)}(p) \Big|_{\hat{p}=im} = -i(2\pi)^4 A \tag{8.156}$$

其中

$$A = \frac{-e^2 m}{(2\pi)^4} \left[\frac{\pi^2}{2} + 2i \int d^4k \int_0^1 dx \frac{1 + x}{(k^2 + m^2 x^2)^2} \right] \tag{8.157}$$

上式中的后一项积分为

$$\int d^4k \int_0^1 dx \frac{1 + x}{(k^2 + m^2 x^2)^2} = \int d^4k \int_0^1 \frac{d(x + x^2/2)}{(k^2 + m^2 x^2)^2}$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{d^4 k}{(k^2 + m^2)^2} + 2m^2 \int d^4 k \int_0^1 \frac{x^2(2+x)dx}{(k^2 + m^2 x^2)^3} \quad (8.158)$$

其中第一积分项是对数发散的。

$$\int d^4 k \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} = i\pi^2 \int_0^\Lambda \frac{K^2 dK^2}{(K^2 + m^2)^2} = i\pi^2 \left\{ \ln \frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} + \frac{m^2}{\Lambda^2 + m^2} - 1 \right\} = i\pi^2 D \quad (8.159)$$

第二个积分为

$$2m^2 \int d^4 k \int_0^1 dx \frac{x^2(1+x)}{(k^2 + m^2 x^2)^2} = \frac{5}{2} i\pi^2 \quad (8.160)$$

所以, 最后

$$A = \frac{\alpha}{2\pi} m \left(\frac{3}{2} D + \frac{9}{4} \right), \quad \alpha^2 = \frac{e^2}{4\pi} \doteq \frac{1}{137}, \quad D = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left\{ \ln \frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} + \frac{m^2}{\Lambda^2 + m^2} - 1 \right\} \quad (8.161)$$

由于 A 中存在对数发散项, 为了消去对数发散项。所以必须在相互作用的哈密顿量中引入一个抵消项。

$$\Delta \mathcal{H}_I = -\delta_m \bar{\psi} \psi, \quad A = \delta_m \quad (8.162)$$

下面回到电子自能, 散射矩阵的二阶近似为

$$\begin{aligned} \langle p' r' | S^{(2)} | p r \rangle &= \sqrt{\frac{m^2}{E E'}} \bar{u}(p') \Sigma^{(2)}(p) u(p) \delta^4(p - p') \\ &= -i(2\pi)^4 A \bar{u}(p') u(p) \delta^4(p - p') \end{aligned} \quad (8.163)$$

即如图 8.17 所示。

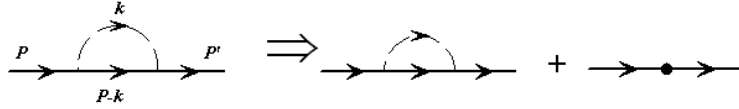


图 8.17: 电子质量重整化

从中可以看出, 引入 $\Delta \mathcal{H}_I = -\delta_m \bar{\psi} \psi$ 后, 可以消除对数发散, 如果是内线的情况, 则其中 Dirac spinor 分别与邻近的收缩掉了 $\bar{\psi}(x') \bar{\psi}(x)$ $\psi(x) \bar{\psi}(x')$ 。所以当引入了抵消项 $\Delta \mathcal{H}_I = -\delta_m \bar{\psi} \psi$ 以后, 它与 $\Sigma^{(2)}(p)$ 的零阶项是严格相消的。具体的形式与减出点的选择有关。但结论对于内线和外线都是一样的。

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}'_I \\ &= [\bar{\psi} \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla \psi + m \bar{\psi} \psi] - ieN (\bar{\psi} \hat{A} \psi) - \delta_m \bar{\psi} \psi \\ &= [\bar{\psi} \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla \psi + (m - \delta_m) \bar{\psi} \psi] - ieN (\bar{\psi} \hat{A} \psi) \\ &= [\bar{\psi} \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla \psi + m_0 \bar{\psi} \psi] - ieN (\bar{\psi} \hat{A} \psi), \quad m = m_0 + \delta_m \end{aligned} \quad (8.164)$$

其中 m_0 为电子的裸质量, δ_m 为电子与电磁场相互作用所引起的电磁质量, m 是电磁场的观察质量。(重整化的质量 $m = m_R$)

实际上拉氏量应该变成: $[\bar{\psi}_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla \psi_0 + m_0 \bar{\psi}_0 \psi_0] - ieN (\bar{\psi}_0 \hat{A}_0 \psi_0)$, 即对于波函数和电荷都要重整化。

重整化是引入一些抵消项, 消去泰勒展开中发散项。下标为 0 的均为裸量。一般的做法是选择一个减出点, 对此作泰勒展开, 分别计算各项。如果出现了发散, 则引入相应的抵消项。但是有些是不可重整

化的, 这是由于展开式中系数与拉氏量中的项形式上不一致, 不能纳入其中, 如果发散项是有限的, 则可以强行引入, 但是如果发散项无穷多 (如四费米子相互作用), 则导致不可重整化。 (unrenormalized) 重整化的作用在于消去发散项, 从而导出有效的辐射修正。

§8.6 电子自能和电荷重整化, 辐射修正

$$\Sigma^{(2)}(p) = \Sigma^{(2)}(p) \Big|_{\hat{p}=im} + BS_f^{-1}(p) + S_f^{-2}(p)\Sigma_f^{(2)}(p) \quad (8.165)$$

其中 $S_f^{-1} = i(2\pi)^4(i\hat{p} + m)$ 。减出零阶项后,

$$\begin{aligned} & \Sigma^{(2)}(p) - \Sigma^{(2)}(p) \Big|_{\hat{p}=im} \\ &= -\frac{i}{2}e^2\pi^2(i\hat{p} + m) - 2e^2 \int d^4k \int_0^1 dx \frac{i\hat{p}(1-x) + 2m}{(k^2 + l^2)^2} + 2e^2 \int d^4k \int_0^1 dx \frac{-m(1-x) + 2m}{(k^2 + m^2x^2)^2} \\ &= (i\hat{p} + m) \left\{ -\frac{i}{2}e^2\pi^2 - 2e^2 \int d^4k \int_0^1 dx \frac{1-x}{(k^2 + m^2x^2)^2} \right\} \\ & \quad - 2e^2 \int d^4k \int_0^1 dx \{i\hat{p}(1-x) + 2m\} \left\{ \frac{1}{(k^2 + l^2)^2} - \frac{1}{(k^2 + m^2x^2)^2} \right\} \end{aligned} \quad (8.166)$$

再利用

$$\frac{1}{(k^2 + l^2)^2} - \frac{1}{(k^2 + m^2x^2)^2} = - \int_0^1 dz \frac{2(p^2 + m^2)x(1-x)}{(k^2 + q^2)^3}, (q^2 = m^2x^2 + (p^2 + m^2)x(1-x)z) \quad (8.167)$$

则可以得到

$$2ie^2\pi^2(p^2 + m^2) \int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{x(1-x)[i\hat{p}(1-x) + 2m]}{m^2x^2 + (p^2 + m^2)x(1-x)z} \quad (8.168)$$

这是由于 $p^2 + m^2 = -(i\hat{p} + m)(i\hat{p} - m)$ 。从而可以得到

$$\begin{aligned} & \Sigma^{(2)}(p) - \Sigma^{(2)}(p) \Big|_{\hat{p}=im} \\ &= S_f^{-1} \left\{ -\frac{\alpha}{8\pi} + \frac{i\alpha}{2\pi^3} \int d^4k \int_0^1 dx \frac{1-x}{(k^2 + m^2x^2)^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\alpha}{2\pi} (i\hat{p} - m) \int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{x(1-x)[i\hat{p}(1-x) + 2m]}{m^2x^2 + (p^2 + m^2)x(1-x)z} \right\} \end{aligned} \quad (8.169)$$

同时上式又等于

$$\Sigma^{(2)}(p) - \Sigma^{(2)}(p) \Big|_{\hat{p}=im} = S_f^{-1}(p) + S_f^{-2}(p)\Sigma_f^{(2)}(p) \quad (8.170)$$

如果令式 (8.169) 中花括号中的 $S_f^{-1}(p) = 0$ 即 $\hat{p} = im$ 时, 即可得到 B, 花括号中的值即为 B。所以

$$\Sigma^{(2)}(p) - \Sigma^{(2)}(p) \Big|_{\hat{p}=im} = S_f^{-1}(p) \left\{ B + S_f^{-1}\Sigma_f^{(2)}(p) \right\} \quad (8.171)$$

利用

$$\int d^4k \int_0^1 dx \frac{1-x}{(k^2 + m^2x^2)^2} = \frac{1}{2} \int d^4k \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} + 2m^2 \int d^4k \int_0^1 dx \frac{x^2(2-x)}{(k^2 + m^2x^2)^3} \quad (8.172)$$

前一项对应 $0.5i\pi^2 D$, 后一项对应 $1.5i\pi^2$ 。

令式 (8.169) 中花括号中的三项 $\hat{p} = im$ 后

$$\frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{x(1-x)(1+x)}{x^2} = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{x} - \frac{\alpha}{2\pi} \quad (8.173)$$

所以

$$B = -\frac{\alpha}{4\pi} \left(D - 4 \int_0^1 \frac{dx}{x} + \frac{11}{2} \right) \quad (8.174)$$

其中 $D \sim$ 紫外发散 (大动量 Λ 截断), $\int_0^1 \frac{dx}{x} \sim$ 红外发散。

最后得到剩下部分的积分 (收敛)

$$\Sigma_f^{(2)}(p) = \frac{i\alpha}{(2\pi)^5} \int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{(1-x)[(i\hat{p}-m)(1-x)(x-2(1+x)z) + m(1+x)]}{m^2x^2 + (p^2 + m^2)x(1+x)z} \quad (8.175)$$

$\Sigma_f^{(2)}(p)$ 紫外收敛, 但是仍旧存在红外发散 (来源于小动量的虚光子)。

考虑电子自能引起的发散, 我们再来看一下 $\Sigma^{(2)}(p)$ 的 Taylor 展开

$$\Sigma^{(2)}(p) = \Sigma^{(2)}(p)|_{\hat{p}=im} + S_f^{-1}(p)B + S_f^{-2}(p)\Sigma_f^{(2)}(p) \quad (8.176)$$

为了消去发散项, 则需要引入抵消项。如在第一项中引入 $\Delta H = -\delta_m \bar{\psi}\psi$, 则

$$\begin{aligned} H \rightarrow H + \Delta H &= \bar{\psi}(\gamma \cdot \nabla + m)\psi - ie\bar{\psi}\hat{A}\psi + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi}(\gamma \cdot \nabla + m_0)\psi - ie\bar{\psi}\hat{A}\psi + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (8.177)$$

相互作用的拉氏量为

$$H_I = -ie\bar{\psi}\hat{A}\psi - \delta_m \bar{\psi}\psi \quad (8.178)$$

QED Renormalized Lagrangian:

$$1. \mathcal{L} = -\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu, \quad m = m_R, e = e_R$$

2. 引入抵消项,

$$\Delta\mathcal{L} = \delta_m Z_2 \bar{\psi}\psi - (Z_2 - 1)(\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi + m\bar{\psi}\psi) - \frac{1}{4}(Z_3 - 1)F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + ie(Z_1 - 1)\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu \quad (8.179)$$

其中 $A_2 = 1 + B, Z_3 = 1 + C$ (真空极化), $Z_1^{-1} = 1 + L$ (顶角项)。相应的 Feynman 图如图 8.18 所示。

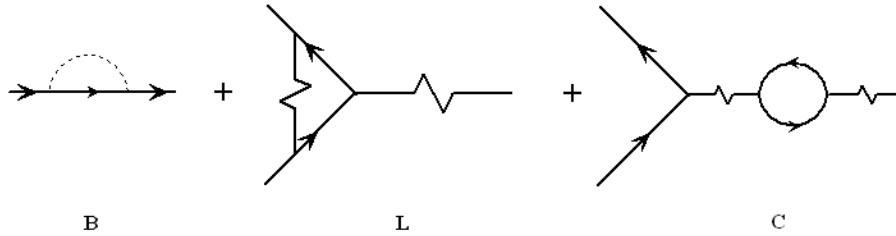


图 8.18: 重整化的三种情况

3. 裸的拉氏量为

$$\mathcal{L} + \Delta\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 = \bar{\psi}_0\gamma_\mu\partial_\mu\psi_0 - m_0\bar{\psi}_0\psi_0 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + ie_0\bar{\psi}_0\gamma_\mu\psi_0 A_{\mu 0} \quad (8.180)$$

相当于原来的拉氏量中参数及波函数的重新定义:

$$\begin{aligned}
m &\rightarrow m_0 = m - \delta_m \\
e &\rightarrow e_0 = (Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2})e \quad \text{包含来自自能} (Z_2), \text{顶角} (Z_1) \text{和真空极化} (Z_3) \text{的贡献} \\
\psi &\rightarrow \psi_0 = \sqrt{Z_2} \psi \\
A_\mu &\rightarrow A_{\mu 0} = \sqrt{Z_3} A_\mu
\end{aligned} \tag{8.181}$$

而且可以证明电荷 $e_0 = (Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2})e$ 中 $Z_1 = Z_2$ ，从而 $e_0 = Z_3^{-1/2}e$ 。

下面我们来看一看电子自能的内线的情况，图 8.19 所示是作为内线电子时的几种情况。

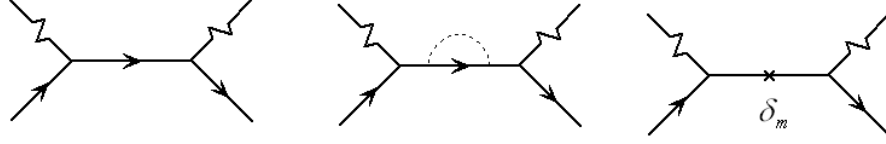


图 8.19: 内线电子自能重整化图

相应的收缩项为

$$(e\bar{\psi}\hat{A}\psi)\delta_m\bar{\psi}\psi(e\bar{\psi}\hat{A}\psi) \tag{8.182}$$

其简化的 Feynman 图为图 8.20，电子自能的情况可以分为三个部分（如图 8.20）。传播子的形式为（其

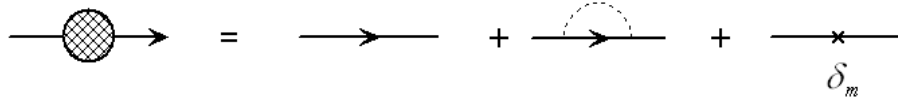


图 8.20: 内线电子自能重整化简化图

中 $\alpha = e^2/4\pi$)

$$\begin{aligned}
S_f^{(2)}(p) &= S_f(p) + S_f(p) \left[\Sigma^{(2)}(p) - \Sigma^{(2)}(p)|_{\hat{p}=im} \right] S_f(p) \\
&= S_f(p) + S_f(p) \left[S_f^{-1}(p)B + S_f^{-2}(p)\Sigma_f^{(2)}(p) \right] S_f(p) \\
&= (1+B)S_f(p) + \Sigma_f^{(2)}(p) \\
&= (1+B) \left(S_f(p) + \Sigma_f^{(2)}(p) \right) + O(\alpha^2)
\end{aligned} \tag{8.183}$$

相当于 $S_f(p) \rightarrow S_f(p) + \Sigma_f^{(2)}(p)$ (有限的辐射修正) 再乘上一个发散因子 $(1+B)$ ，注意 $S_f^{-1}(p) = (2\pi)^4 i(\hat{p} + m)$ ，相当于动量表象中的 $\square + m$ ；所以与 B 对应的抵消项的形式 $\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi$ ，主要引起波函数和电荷的重整化。也即

$$B\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi = (Z_2 - 1)\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi \tag{8.184}$$

对于外线电子的情况大致和内线的情况一致，如图 8.21 所示的外线电子自能的三种情况。

图 8.21 的简化形式如图 8.22 所示的情形，其中途中黑点表示外线的情况。

相应的形式 (注意和内线的情形相区别) 为

$$u^{(2)}(p) = u(p) + S_f(p) \left[\Sigma^{(2)}(p) - \Sigma^{(2)}(p)|_{\hat{p}=im} \right] u(p) \tag{8.185}$$

进一步的推导给出

$$u^{(2)}(p) = \left\{ 1 + S_f(p) \left[S_f^{-1}(p)B + S_f^{-2}(p)\Sigma_f^{(2)}(p) \right] \right\} u(p) \tag{8.186}$$

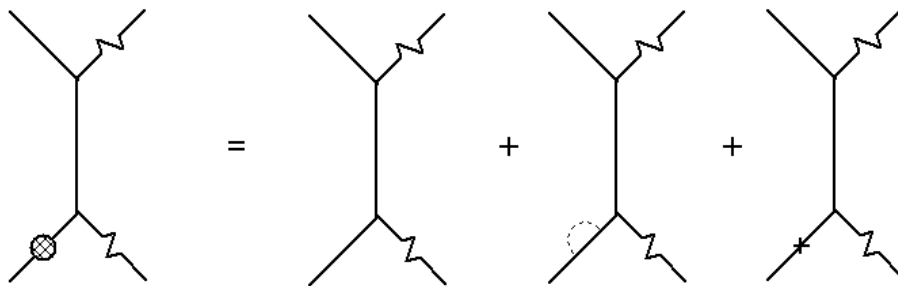


图 8.21: 外线电子自能重整化图



图 8.22: 外线电子自能重整化简化图

由于 $S_f^{-1}(p)u(p) = 0$ ，所以上式中 $S_f^{-2}(p)$ 所在的项没有贡献，但是对于 $S_f^{-1}(p)$ 则持有不同的看法：

$$u^{(2)}(p) = [1 + S_f(p)S^{-1}(p)B] u(p) = \begin{cases} u(p) & S_f^{-1}(p) \text{ 先作用在 } u(p) \text{ 上} \\ (1+B)u(p) & S_f^{-1}(p) \text{ 先和 } S_f(p) \text{ 作用} \end{cases} \quad (8.187)$$

但是实际上正确的取法是

$$u^{(2)}(p) = (1+B)^{1/2}u(p) \quad (8.188)$$

对应波函数的取法

$$\psi \rightarrow (1+B)^{1/2}\psi \quad \bar{\psi} \rightarrow (1+B)^{1/2}\bar{\psi} \quad (8.189)$$

从而

$$\psi\bar{\psi} \rightarrow (1+B)\psi\bar{\psi} \quad (\text{与内线的情况一致}) \quad (8.190)$$

电子自能图经过质量重整化以后，仍旧存在着发散 ($\sim B$)，其后果导致

1. 用 $S_f^{(2)}(p) = (1+B)(S_f(p) + \Sigma_f^{(2)}(p))$ 代替 $S_f(p)$
2. 用 $u^{(2)}(p) = (1+B)^{1/2}u(p)$ 代替 $u(p)$

等价于

1. 用 $S_f^{(2)}(p) = S_f(p) + \Sigma_f^{(2)}(p)$ 代替 $S_f(p)$
2. 每条内线贡献一个因子 $(1+B)$ ，每条外线贡献一个因子 $(1+B)^{1/2}$

引入抵消项抵消自能图所引起的发散因子为

$$(1+B)^{E_i + \frac{1}{2}E_e} = (1+B)^n \quad (8.191)$$

其中 E_i 代表电子内线的数目， E_e 代表电子外线的数目。 n 为顶点数 $2n = 2E_i + E_e$ ，因此抵消项贡献因子 $(1+B)^{-n}$ 。

但是在 S 矩阵元中存在因子 $e^n (e = e_R)$ ，抵消项的作用相当于把 $e^n \rightarrow e^n (1+B)^{-n} = e_0^n$ ，即

$$e_0 = \frac{e}{1+B} \quad (8.192)$$

所以最后 $S_f^{(2)}(p) = S_f(p) + \Sigma_f^{(2)}(p)$ 。

§8.7 真空极化和电荷重整化

真空极化的 Feynman 图如图 8.23 所示。

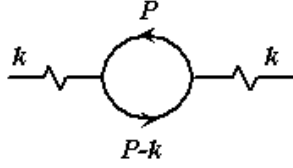


图 8.23: 真空极化 Feynman 图

在电子-电子散射的情形如图 8.24 所示。

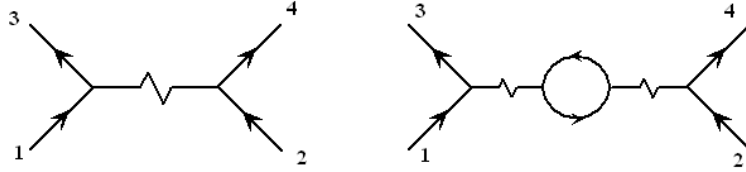


图 8.24: 电子-电子散射中真空极化

其中矩阵元为

$$\begin{aligned} \langle p_3, p_4 | S^{(2)} + S | p_1, p_2 \rangle &= e^2 (2\pi)^8 \frac{m^2}{\sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \int d^4 k \left[(\bar{u}_3 \gamma_\mu u_1) D_{f,\mu\nu}^{(2)}(k) (\bar{u}_4 \gamma_\nu u_2) \right] \\ &\quad \delta^4(p_1 - p_3 - k) \delta^4(k + p_2 - p_4) \end{aligned} \quad (8.193)$$

其中传播子的形式为

$$D_{f,\mu\nu}^{(2)}(k) = \delta_{\mu\nu} D_f(k) + D_f(k) \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) D_f(k) \quad (8.194)$$

$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)$ 为二阶张量。

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = k_\mu k_\nu Q(k^2) + \delta_{\mu\nu} P(k^2) \quad (8.195)$$

应用流守恒 $k_\mu \Pi_{\mu\nu}(k) = k_\nu \Pi_{\mu\nu}(k) = 0$ ，则可以得到

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = (k_\mu k_\nu - k^2 \delta_{\mu\nu}) Q(k^2) \quad (8.196)$$

对 $\mu\mu$ 求和，即

$$\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(k) = -3k^2 Q(k^2) = e^2 \int d^4 p \operatorname{Tr} \left[\gamma_\mu \frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2} \gamma_\mu \frac{i(\hat{p} - \hat{k}) - m}{(p - k)^2 + m^2} \right] \quad (8.197)$$

当 $k = 0$ 时，

$$\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(0) = 8e^2 \int d^4 p \frac{p^2 + 2m^2}{(p^2 + m^2)^2} \quad (8.198)$$

这是一个二次发散的量，规范不变要求 $\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(0) = 0$ ，所以规定它等于零。因为要消去二次发散则必然要引入 $(\delta_\mu)^2 A_\mu A_\nu$ ，显然这是破坏规范不变性的。（参考图 8.25）



图 8.25: 电子自能与真空极化

下面要求

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(k) &= \Pi_{\mu\mu}^{(2)}(k) - \Pi_{\mu\mu}^{(2)}(0) \\ &= 8e^2 \int d^4p \left\{ \frac{p^2 - (pk) + 2m^2}{(p^2 + m^2)[(p-k)^2 + m^2]} - \frac{p^2 + 2m^2}{(p^2 + m^2)^2} \right\}\end{aligned}\quad (8.199)$$

其中右边第一项可以化为

$$8e^2 \int d^4p (p^2 + 2m^2 - (pk)) \int_0^1 dx \frac{1}{((p-kx)^2 + q^2)^2} \quad (q^2 = m^2 + k^2x(1-x)) \quad (8.200)$$

所以

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(k) &= 8e^2 \int d^4p (p^2 + 2m^2 - (pk)) \int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{2(2(pk) - k^2)x}{\{(p-kxz)^2 + l^2\}^3} \\ &\xrightarrow[\substack{y=xz \\ dy=x dz}]{y=xz} 8e^2 \int d^4p (p^2 + 2m^2 - (pk)) \int_0^1 dy (1-y) \frac{2(pk) - k^2}{\{(p-ky)^2 + l^2\}^3}\end{aligned}\quad (8.201)$$

其中 $l^2 = m^2 + k^2xz(1-xz) = m^2 + k^2y(1-y)$ 。另外这中间用到

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx \int_0^1 x dz f(xz) &\stackrel{y=xz}{\stackrel{dy=x dz}{\equiv}} \int_0^1 dx \int_0^x dy f(y) \\ &= x \int_0^x f(y) dy \Big|_0^1 - \int_0^1 x d \left[\int_0^x f(y) dy \right] \\ &= \int_0^1 f(y) dy - \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 dy (1-y) f(y)\end{aligned}\quad (8.202)$$

真空极化的重整化图如图 8.26 所示。

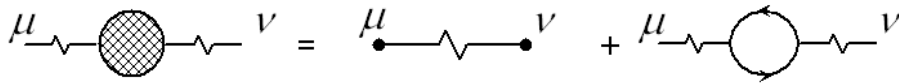


图 8.26: 真空极化的重整化图

整个积分是线性发散的，移动原点后将有一个有限的改变量。线性发散项移动原点的改变量等当于

$$16e^2 \int d^4p \int_0^1 dy (1-y) \frac{[(p-ky)^2 + l^2] 2(pk)}{[(p-ky)^2 + l^2]^3} = 32e^2 \int d^4p \int_0^1 dy \frac{(1-y)(pk)}{[(p-ky)^2 + l^2]^2} \quad (8.203)$$

移动原点后， $p-ky \rightarrow p$ ，线性发散改变量为

$$32e^2 \int_0^1 (1-y) dy \left(-\frac{i}{2} \pi^2 k^2 p \right) = -\frac{8}{3} i e^2 \pi^2 k^2 \quad (8.204)$$

所以，移动原点后

$$\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(k) = -\frac{8}{3} i e^2 \pi^2 k^2 + 16e^2 \int d^4p \int_0^1 dy (1-y) \frac{1}{(p^2 + l^2)^3} R \quad (8.205)$$

其中

$$R = [(p + ky)^2 - (p + ky)k + 2m^2] [2(p + ky)k - k^2] \quad (8.206)$$

另外 p 的奇次项可以略去, 则 $R \rightarrow R'$,

$$R' = (2y - 1) [2(pk)^2 + p^2k^2 + (k^2)^2y(y - 1) + 2m^2k^2] \quad (8.207)$$

另外 $(pk)^2 = p_\mu p_\nu k_\mu k_\nu \xrightarrow{int.} \frac{1}{4}p^2k^2$ 。所以

$$R' \rightarrow R'' = (2y - 1)k^2 \left[\frac{3}{2}p^2k^2 + k^2y(y - 1) + 2m^2 \right] \quad (8.208)$$

所以

$$\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(k) = D_f^{-1}(k) \left\{ -\frac{2\alpha}{3\pi} - \frac{4i\alpha}{\pi^3} \int d^4p \int_0^1 dy(1 - y)(2y - 1) \frac{\frac{3}{2}p^2 + k^2y(y - 1) + 2m^2}{(p^2 + l^2)^3} \right\} \quad (8.209)$$

另外又有

$$\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(k) = 3 \left\{ CD_f^{-1}(k) + \Pi_f^{(2)}(k) D_f^{-2}(k) \right\} = D_f^{-1}(k) \left\{ 3C + 3\Pi_f^{(2)}(k) D_f^{-1}(k) \right\} \quad (8.210)$$

分析可得 C 是对数发散的。 $\Pi_f^{(2)}$ 是收敛的, 另外实际上 $\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(k)$ 是 k^2 的函数。

如果让花括号中的 $k^2 = 0$, 则可以得到 $\{ \} = 3C$ 。从而由前面的两个式子比较可得

$$3C = -\frac{2\alpha}{3\pi} - \frac{4i\alpha}{\pi^3} \underbrace{\int d^4p \int_0^1 dy(1 - y)(2y - 1) \frac{\frac{3}{2}p^2 + 2m^2}{(p^2 + m^2)^2}}_{\frac{1}{6}} \quad (8.211)$$

其中分式对于 y 已经没有了依赖, 所以

$$C = -\frac{\alpha}{3\pi} \left(D + \frac{5}{6} \right) \quad \left(\int \frac{d^4k}{(k^2 + m^2)^2} = i\pi^2 D, \quad D \propto \ln \Lambda, \Lambda \rightarrow \infty \right) \quad (8.212)$$

下面求解有限量 $\Pi_f^{(2)}(k)$ (花括号中减去 $3C$, 提出 k^2)

$$\Pi_f^{(2)}(k) = \frac{\alpha}{24\pi^7} \int d^4p \int_0^1 dy y(1 - y)^2(2y - 1) \left\{ \frac{2}{(p^2 + l^2)^3} + \int_0^1 dz \frac{3(3p^2 + 4m^2)}{(p^2 + l_1^2)^4} \right\} \quad (8.213)$$

其中 $l_1^2 = m^2 + k^2y(1 - y)z$, $l^2 = m^2 + k^2y(1 - y)$ 。对 d^4p 积分以后可得

$$\stackrel{d^4p}{=} \frac{i\alpha}{24\pi^5} \int_0^1 dy y(1 - y)^2(2y - 1) \left\{ \frac{1}{l^2} + \int_0^1 dz \left(\frac{3}{l_1^2} + \frac{2m^2}{l_1^4} \right) \right\} \quad (8.214)$$

这中间利用了积分 $J_n = \int \frac{d^4k}{(k^2 + a^2)^n}$ 。

$$\stackrel{dz}{=} \frac{i\alpha}{24\pi^5} \int_0^1 dy y(1 - y)^2(2y - 1) \left\{ \frac{3y(1 - y)}{l^2} + \frac{3}{k^2} \ln \left(\frac{l^2}{m^2} \right) \right\} \quad (8.215)$$

对 dy 分部积分可得有限值。

$$\stackrel{dy, by \text{ part}}{=} \frac{i\alpha}{3(2\pi)^5} \int_0^1 dy \frac{y^2(2y - 1)(2y - 3)}{m^2 + k^2y(1 - y)} \quad (8.216)$$

所以由 $\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(k) = -3k^2 Q(k^2)$ 可得

$$\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(k) = (k_\mu k_\nu - k^2 \delta_{\mu\nu}) Q(k^2) = \delta_{\mu\nu} \left(CD_f^{-1}(k) + \Pi_f^{(2)}(k^2) D_f^{-2}(k) \right) + (\cdots) k_\mu k_\nu \quad (8.217)$$

注意 $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)$ 对应图 8.27，另外 $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)a_\mu(k)a_\nu(k)$ 当 $a_\mu \rightarrow a_\mu + \beta k_\mu$ 时，可以证明 $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)\beta k_\mu = 0$ (规范变换的要求)。

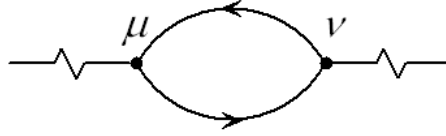


图 8.27: 真空极化圈图

光子传播函数的二次近似 (如图 8.26) :

$$D_{f,\mu\nu}^{(2)}(k) = \delta_{\mu\nu} D_f(k) + D_f(k) \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) D_f(k) \quad (8.218)$$

$$\begin{aligned} &= \delta_{\mu\nu} D_f(k) + D_f(k) (k_\mu k_\nu - k^2 \delta_{\mu\nu}) Q(k^2) D_f(k) \\ &= \delta_{\mu\nu} D_f(k) + D_f(k) \left(C D_f^{-1}(k) + \Pi_f^{(2)}(k^2) D_f^{-2}(k) \right) D_f(k) + (\cdots) k_\mu k_\nu \\ &= \delta_{\mu\nu} (1 + C) D_f(k) + \delta_{\mu\nu} \Pi_f^{(2)}(k^2) + (\cdots) k_\mu k_\nu \\ &= \delta_{\mu\nu} (1 + C) (D_f(k) + \Pi_f^{(2)}(k^2)) + (\cdots) k_\mu k_\nu + O(\alpha^2) \end{aligned} \quad (8.219)$$

从中得到两点变化

1. 整个乘以因子 $(1 + C)$
2. $D_f(k) \rightarrow D_f(k) + \Pi_f^{(2)}(k)$ ，有限的辐射修正。

下面来讨论光子外线的情况。

光子外线

$$a_\mu(k) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e_\mu(k) \quad (8.220)$$

二次修正如图 8.28 所示。

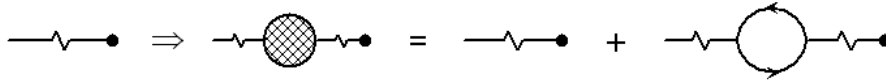


图 8.28: 真空极化外线光子的二次修正

经过二次修正以后，外线光子变成

$$\begin{aligned} a_\mu^{(2)}(k) &= a_\mu(k) + D_f \left\{ C D_f^{-1}(k) + \Pi_f^{(2)}(k) D_f^{-2}(k) \right\} a_\mu(k) \\ &= a_\mu(k) + C D_f(k) D_f^{-1}(k) a_\mu(k) \end{aligned} \quad (8.221)$$

其中 $D_f^{-1}(k)a_\mu(k) = 2\pi^2 i k^2 a_\mu(k) = 0$ ，所以上式中的 $D_f^{-2}(k)$ 无贡献，而 $D_f^{-1}(k)$ 则出现了不定项：

$$a_\mu^{(2)}(k) = \begin{cases} a_\mu(k) \\ a_\mu(k)(1 + C) \end{cases} \Rightarrow a_\mu^{(2)}(k) = (1 + C)^{1/2} a_\mu(k) \quad (8.222)$$

真空极化导致的电荷重整化：

1. 真空极化使得对每条内线光子贡献 $(1 + C)$ ，每条外线光子贡献 $(1 + C)^{1/2}$
2. $D_f^{(2)}(k) = D_f(k) + \Pi_f^{(2)}(k)$

假设 Feynman 图共有 n 个顶点, P_i 个光子内线、 P_e 条光子外线, 则真空极化贡献因子为

$$(1 + C)^{P_i + \frac{1}{2}P_e} = (1 + C)^{n/2} = (\sqrt{1 + C})^n \quad (n = 2P_i + P_e) \quad (8.223)$$

如果原来的裸电荷 e_0 , Feynman 图正比与 e_0^n , 则真空极化的贡献 $e_0 \rightarrow e_0(1 + C)^{1/2}$ 。重整化以后的电荷 $e_R = e_0(1 + C)^{1/2}$ 。

§8.8 顶角函数和电荷重整化

顶角的情况如图 8.29 所示, 分别代表一级和三级修正。

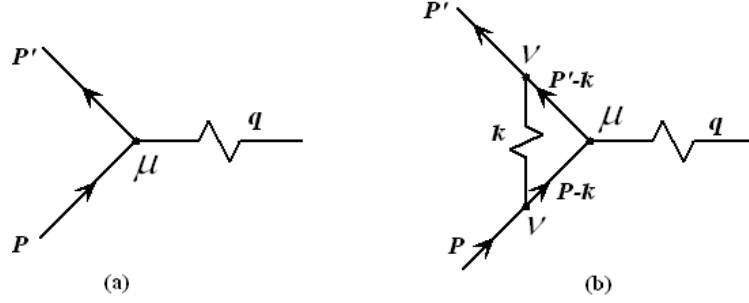


图 8.29: 顶角的一次修正和三级修正

$$\langle f | S^{(1)} | i \rangle = -\frac{1}{V} e \sqrt{\frac{m^2}{EE'}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p - q) \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) a_\mu(q) \quad (8.224)$$

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(3)} | i \rangle &= -\frac{1}{V} e^3 \sqrt{\frac{m^2}{EE'}} (2\pi)^{12} \int d^4 k \bar{u}(p') \gamma_\nu D_f(k) S_f(p' - k) \gamma_\mu S_f(p - k) \gamma_\nu u(p) a_\mu(q) \delta^{(4)}(p' - p - q) \\ &= -\frac{1}{V} e \sqrt{\frac{m^2}{EE'}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p - q) \bar{u}(p') \Lambda_\mu^{(2)}(p, p') u(p) a_\mu(q) \end{aligned} \quad (8.225)$$

其中

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p, p') = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{1}{k^4} \gamma_\nu \frac{i(\hat{p}' - \hat{k}) - m}{(p' - k)^2 + m^2} \gamma_\mu \frac{i(\hat{p} - \hat{k}) - m}{(p - k)^2 + m^2} \gamma_\nu \quad (8.226)$$

两者之和得到

$$\gamma_\mu \rightarrow \gamma_\mu + \Lambda_\mu^{(2)}(p, p') \equiv \Gamma_\mu^{(2)}(p, p') \quad (8.227)$$

顶角修正的情况:

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p, p') = \frac{ie^2}{4\pi^4} \int d^4 k \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{(\hat{p} - \hat{k}) \gamma_\mu (\hat{p}' - \hat{k}) - 2im(p_\mu + p'_\mu - 2k_\mu) - m^2 \gamma_\mu}{\{(k - px - qy)^2 + t^2\}^3} \quad (8.228)$$

其中 $t^2 = m^2 x^2 + p^2 x + q(p + p')y - (qy + px)^2$, 分析可知 $\Lambda_\mu^{(2)}(p, p')$ 为对数发散。所以

1. 移动原点, 积分值不变, $k - px - qy \rightarrow k$ 。
2. 移动原点, 所有含 k_μ 的奇次项对积分不贡献。
3. $\int d^4 k k k_\mu^2 \rightarrow \frac{1}{4} \int d^4 k k^2$

从而可以得到

$$\Lambda_{\mu}^{(2)}(p, p') \xrightarrow{1} \frac{ie^2}{4\pi^4} \int d^4k \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{T}{(k^2 + t^2)^3} \quad (8.229)$$

其中

$$T = (\hat{p}(1-x) - \hat{q}y - \hat{k}) \gamma_{\mu} (\hat{p}' - \hat{p}x - \hat{q}y - \hat{k}) - m^2 \gamma_{\mu} - 2im(p_{\mu} + p'_{\mu} - 2p_{\mu}x - 2q_{\mu}y - 2k_{\mu}) \quad (8.230)$$

进一步可得

$$T \xrightarrow{2,3} T' = (\hat{p}(1-x) - \hat{q}y) \gamma_{\mu} (\hat{p}' - \hat{p}x - \hat{q}y) - \frac{1}{2}k^2 \gamma_{\mu} - m^2 \gamma_{\mu} - 2im(p_{\mu} + p'_{\mu} - 2p_{\mu}x - 2q_{\mu}y) \quad (8.231)$$

在 $\hat{p} = \hat{p}' = im$ 处进行 Taylor 展开 (即 $p = p'$ 且 p, p' 在 onshell 处展开), 即让 p, p' 都连在外线上, 所以 $q = p' - p = 0$ 。展开来源于 $(i\hat{p} + m)u(p) = 0, \bar{u}(p')(i\hat{p}' + m) = 0$ 。

所以

$$T' = \gamma_{\mu} \left[m^2 \left(2 - 2x - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{1}{2}(k^2 + m^2 x^2) \right] \quad (8.232)$$

且 $t^2 = -p^2 x^2 = m^2 x^2$ 。故

$$\Lambda_{\mu}^{(2)}(p, p) \Big|_{\hat{p}=im} = L \gamma_{\mu} \quad (8.233)$$

其中

$$L = \frac{i\alpha}{2\pi^8} \int d^4k \int_0^1 dx x \left\{ \frac{m^2(4-4x-x^2)}{(k^2 + m^2 x^2)^3} - \frac{1}{(k^2 + m^2 x^2)^3} \right\} \quad (8.234)$$

上式中第二项

$$\sim \int_0^1 dx \frac{x}{(k^2 + m^2 x^2)^3} = \frac{1}{2} \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} + \int_0^1 \frac{2m^2 x^3 dx}{(k^2 + m^2 x^2)^3} \quad (8.235)$$

故而

$$\begin{aligned} L &= \frac{\alpha}{4\pi} D + \frac{i\alpha}{2\pi} \int d^4k \int_0^1 dx \frac{m^2 x(4-4x-3x^2)}{(k^2 + m^2 x^2)^3} \\ &= \frac{\alpha}{4\pi} \left(D - 4 \int_0^1 \frac{dx}{x} + \frac{11}{2} \right) = -B \end{aligned} \quad (8.236)$$

总而言之

$$\Lambda_{\mu}^{(2)}(p, p') = L \gamma_{\mu} + \Lambda_{\mu f}^{(2)}(p, p') \quad (8.237)$$

其中后面一项是收敛 (紫外收敛) 的。另外

$$\Lambda_{\mu f}^{(2)}(p, p') \xrightarrow{p'-p=q \leq m} -\frac{\alpha}{3\pi m^2} \left\{ q^2 \gamma_{\mu} \left(\ln \frac{m}{\rho} - \frac{3}{8} \right) + \frac{3}{4} m \sigma_{\mu\nu} q_{\nu} \right\} \quad (8.238)$$

其中 $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i} (\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} - \gamma_{\nu} \gamma_{\mu})$, ρ 是为了克服红外发散而引入的光子质量。即传播子的形式

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2} \delta_{\mu\nu} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 + \rho^2} \delta_{\mu\nu} \quad (8.239)$$

也就是说低频虚光子的贡献 + 低频实光子的贡献 = 红外有限。

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu}^{(2)}(p, p') &= \gamma_{\mu} + \Lambda_{\mu}^{(2)}(p, p') \\ &= (1 + L) \gamma_{\mu} + \Lambda_{\mu, f}^{(2)}(p, p') = (1 + L) \left(\gamma_{\mu} + \Lambda_{\mu, f}^{(2)}(p, p') \right) + O(\alpha^2) \end{aligned} \quad (8.240)$$

考虑到顶角修正以后

$$\begin{aligned}\gamma_\mu &\rightarrow (1+L) \left(\gamma_\mu + \Lambda_{\mu,f}^{(2)}(p, p') \right) \\ e_0 \gamma_\mu &\rightarrow e_0 (1+L) \left(\gamma_\mu + \Lambda_{\mu,f}^{(2)}(p, p') \right) \\ e_0 (1+L) &= e_R\end{aligned}\tag{8.241}$$

考虑了电子自能、真空极化和顶角修正所引起的重整化效应后,

1. 以 $m_R = m_0 + \delta_m$ 代替 m_0
2. 以 $e_R = e_0(1+B)(1+C)^{1/2}(1+L) \xrightarrow{BL=O(\alpha^2)} e_0(1+C)^{1/2}$ 代替 e_0
3. 以 $S_f^{(2)}(p) = S_f(p) + \Sigma_f^{(2)}(p)$ 代替 $S_f(p)$
4. 以 $D_f^{(2)}(k) = D_f(k) + \Pi_f^{(2)}(k)$ 代替 $D_f(k)$ 。
5. 以 $\Gamma_\mu^{(2)}(p, p') = \gamma_\mu + \Lambda_{\mu,f}^{(2)}(p, p')$ 代替 γ_μ

其中电荷的重整化可以进一步表示为

$$\begin{aligned}e_R &= e_0(1+B)(1+C)^{1/2}(1+L) = \left(1 + \frac{1}{2}C\right) (1+B+L)e_0 + O(\alpha^2) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}C\right) e_0 + O(\alpha^2) \quad (\because B = -L)\end{aligned}\tag{8.242}$$

§8.8.1 Ward-Takahashi Identity

顶角如图 8.29(b) 所示, 积分部分为

$$\Lambda_\mu(p, p') = ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\nu \frac{1}{i(\hat{p}' - \hat{k}) + m} \gamma_\mu \frac{1}{i(\hat{p} - \hat{k}) + m} \gamma_\nu \frac{1}{k^2}\tag{8.243}$$

电子自能 (如图 8.25), 积分部分 (比较以前的形式) 为

$$\Sigma(p) = -e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\nu \frac{1}{i(\hat{p} - \hat{k}) + m} \gamma_\nu \frac{1}{k^2}\tag{8.244}$$

可以证明

$$\Lambda_\mu(p, p) = \frac{\partial}{\partial p_\mu} \Sigma(p)\tag{8.245}$$

利用

$$\frac{1}{i(\hat{p}' - \hat{k}) + m} i(\hat{p}' - \hat{p}) \frac{1}{i(\hat{p} - \hat{k}) + m} = \frac{1}{i(\hat{p} - \hat{k}) + m} - \frac{1}{i(\hat{p}' - \hat{k}) + m}\tag{8.246}$$

可以得到

$$\Sigma(p) - \sigma(p') = -q_\mu \Lambda_\mu(p, p') \quad (\text{其中 } q' = p' - p)\tag{8.247}$$

从而马上可以得到

$$\Lambda_\mu(p, p) = \frac{\partial}{\partial p_\mu} \Sigma(p) \quad \text{Ward-Takahashi Identity}\tag{8.248}$$

而

$$\Lambda_\mu(p, p)|_{\hat{p}=im} = L\gamma_\mu \quad \Sigma(p) - \Sigma(p)|_{\hat{p}=im} = Bi(i\hat{p} + m) + S_f^{-2}(p)(\cdots)\tag{8.249}$$

马上可以得到

$$L = -B, \quad Z_1 = Z_2 \quad \text{任意阶都成立} \quad (8.250)$$

另外, 去掉 $(2\pi)^4$ 后,

$$\Sigma(p) = \delta_m + (i\hat{p} + m)(Z_2^{-1} - 1), \quad \Lambda_\mu(p, p) = (Z_1^{-1} - 1)\gamma_\mu \quad (8.251)$$

同样可以得到 $Z_1 = Z_2$ 。

§8.9 电子被外场散射和电子的反常磁矩

设想 Feynman 图 (如图 8.30), 当包括了所有的这些图形后, S 矩阵元可以表示成

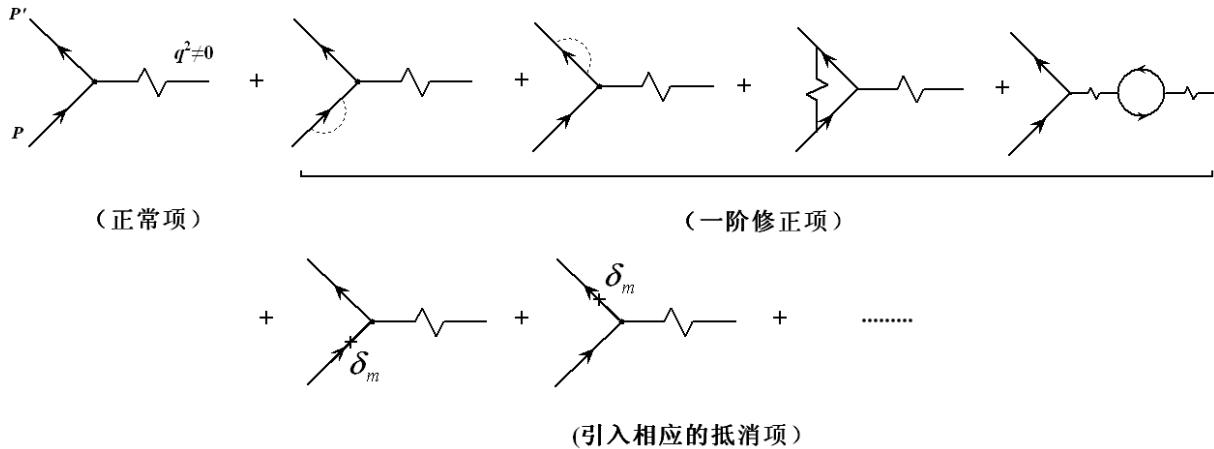


图 8.30: 电子外场散射的修正项和抵消项

$$\begin{aligned}
 \langle f | S^{(1)} + S^{(3)} | i \rangle &= -e_0 \sqrt{\frac{m^2}{EE'}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + q - p') a_\mu(q) (1 + B)(1 + L)(1 + C)^{1/2} \\
 &\quad \bar{u}(p') \left(\gamma_\mu + \Lambda_{\mu f}^{(2)}(p, p') \right) u(p) \left(1 + D_f^{-1}(q) \Pi_f^{(2)}(q) \right) \\
 &= -e_R \sqrt{\frac{m^2}{EE'}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + q - p') \bar{u}(p') \left[\gamma_\mu + \Lambda_{\mu f}^{(2)}(p, p') \right. \\
 &\quad \left. + \gamma_\mu D_f^{-1}(q) \Pi_f^{(2)}(q) \right] u(p) a_\mu(q) \quad (8.252)
 \end{aligned}$$

真空极化 (在低能近似下)

$$\begin{aligned}
 \Pi_f^{(2)}(q^2) D_f^{-1}(q^2) &= \frac{\alpha q^2}{3\pi} \int_0^1 dy \frac{y^2(2y-3)(1-2y)}{m^2 + q^2 y(1-y)} \stackrel{q^2 \ll m^2}{\approx} \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \int_0^1 dy y^2(2y-3)(1-2y) \\
 &= \frac{\alpha}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} \quad (8.253)
 \end{aligned}$$

顶角修正 (存在红外发散)

$$\Lambda_{\mu f}^{(2)}(p, p') = -\frac{\alpha}{3\pi m^2} \left\{ q^2 \gamma_\mu \left(\ln \frac{m}{\rho} - \frac{3}{8} \right) + \frac{3}{4} m \sigma_{\mu\nu} q_\nu \right\}, \quad \frac{1}{k^2 - i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{k^2 + \rho^2 - i\epsilon} \quad (8.254)$$

即是说顶角的修正有一部分为 γ_μ , 另一部分为 $\sigma_{\mu\nu} q_\nu$ 。经过重整化后的矩阵元为

$$\langle f | S^{(1)} + S^{(3)} | i \rangle \propto \bar{u}(p') \left[\gamma_\mu + \Lambda_{\mu f}^{(2)}(p, p') + \gamma_\mu \Pi_f^{(2)}(q^2) D_f^{-1}(q) \right] u(p) a_\mu(q)$$

$$\doteq \bar{u}(p') \left\{ \gamma_\mu - \frac{\alpha}{3\pi m^2} \left[q^2 \gamma_\mu \left(\ln \frac{m}{\rho} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) + \frac{3}{4} m \sigma_{\mu\nu} q_\nu \right] \right\} u(p) a_\mu(q) \quad (8.255)$$

其中式中的 $\frac{1}{5}$ 来自真空极化的贡献。

§8.9.1 电子的磁矩

注意到

$$\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[\frac{p'_\mu + p_\mu}{2im} - \frac{1}{2m} \sigma_{\mu\nu} (p' - p)_\nu \right] u(p) \quad (8.256)$$

由上式中的后一项可以得到

$$\begin{aligned} \frac{-e}{2m} \sigma_{\mu\nu} e_\mu^\lambda (p' - p)_\nu &\xrightarrow{\text{坐标表象}} -\frac{e}{4m} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= -\frac{e}{2m} (i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}), \quad \sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \end{aligned} \quad (8.257)$$

其中

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (8.258)$$

这表明电子存在一个内禀的磁矩。

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{作用能为: } -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) \quad (8.259)$$

另外

$$-\frac{e}{2m} \sigma_{\mu\nu} q_\nu \rightarrow -\frac{e}{2m} \sigma_{\mu\nu} q_\nu - \frac{1}{2m} \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right) \sigma_{\mu\nu} q_\nu = -\frac{e}{2m} \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) \sigma_{\mu\nu} q_\nu \quad (8.260)$$

所以理论值为

$$\mu_0 \rightarrow \boldsymbol{\mu} = \mu_0 \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) \mu_0 = 1.0011614 \mu_0 \quad (8.261)$$

而 1998 年 PDG 测得的实验值为

$$\mu = (1.001159621393 \pm 0.00000000010) \frac{e\hbar}{2mc} \quad (8.262)$$

其中常用的单位

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \quad \frac{\mu_e}{\mu_B} - 1 = \frac{1}{2}(g - 2) \quad (8.263)$$

附：真空极化在 QCD 中的困惑。

与 QED 的真空极化不同，QCD 中存在非微扰项。如图 8.31 所示。

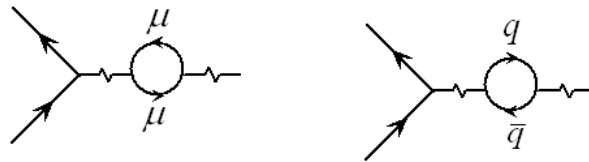


图 8.31: QED 和 QCD 中真空极化

在 QED 中真空极化圈图中没有自相互作用，但是在 QCD 中，夸克和反夸克之间有相互作用导致不

能用微扰计算。另外原来在 QED 中 $\alpha = \frac{1}{4\pi}e^2(q^2) \sim 137^{-1}, q^2 = 0$, 而在 QCD 中 $\alpha = \alpha(q^2 = -M_Z^2) \sim 128^{-1}$ 。

第九章 关于重整化的一些讨论

§9.1 场论中的发散和表面发散度 (Superficial Degree of Divergence)

讨论费米子场 ψ 和标量场 φ 。

拉氏量为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I \quad (9.1)$$

其中相互作用的拉氏量为

$$\mathcal{L}_I = g\bar{\psi}\psi\varphi; \quad g'\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi; \quad \lambda\varphi^3; \quad \lambda'\varphi^4; \quad f\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\partial_\mu\varphi; \quad f'\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi\partial_\mu\varphi \quad (9.2)$$

分别代表不同的顶角相互作用。

讨论一个 Feynman 图, 假定有 B 条标量粒子外线数, IB 条标量粒子内线数, F 条费米子外线, IF 条费米子内线。 n_i 是第 i 种顶角的数目 (i 代表不同的 $\mathcal{L}_I$ 中的情况), b_i 为第 i 种顶角的标量线数, f_i 表示第 i 种费米子线数, d_i 是第 i 种顶角的微商数目。则一定有

$$B + 2(IB) = \sum_i n_i b_i \quad (9.3)$$

$$F + 2(IF) = \sum_i n_i f_i \quad (9.4)$$

定义表面发散度 (Superficial Degree of Divergence)

$$D \triangleq \text{积分中分子动量幂次} - \text{积分中分母的动量幂次} \quad (9.5)$$

可以得到

$$D = \sum_i n_i d_i 2(IB) + 3(IF) - 4 \sum_i n_i + 4 \quad (9.6)$$

其中

1. 第一项表明每一个微商贡献一个动量因子 (+1)。
2. 第二项表明每条标量场内线贡献一个积分 (+4) 和一个传播子 (-2)=(+2)

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2 + m^2 - i\epsilon} \quad (9.7)$$

3. 第三项表明每条费米子贡献一个积分因子 (+4) 和一个传播子 (-1)=(+3)

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{-i}{i\hat{p} + m} \quad (9.8)$$

4. 第四项和第五项表明每个顶角有一 4 动量守恒的 $\delta^{(4)}(\sum p)$ 的函数, 每一个贡献因子 (-4), 但是最后还得保留总 4 动量守恒的 δ 函数。

利用式 9.3 和 9.4, 从式 9.6 中消去 IB, IF , 从而得到

$$D = -B - \frac{3}{2}F + 4 + \sum_i n_i \delta_i \quad (9.9)$$

$$\delta_i = b_i + \frac{3}{2}f_i + d_i - 4 \quad (9.10)$$

最后, 我们要证明

$$\delta_i = -\dim(g_i) \quad (g_i: \text{第 } i \text{ 种顶角 (相互作用) 的 Coupling Constant}) \quad (9.11)$$

其中 $\dim$ 表示取量纲, 并注意 $\hbar = c = 1$, 所以

$$\dim(\text{质量}) = 1 \quad \dim(\text{长度}) = -1 \quad (9.12)$$

从而我们得到标量场和拉氏量的量纲为

$$\dim(\varphi) = 1 \quad \dim(\mathcal{L}) = 4 \quad (9.13)$$

另外从中可以推出 $\dim(\mathcal{H}) = 4, \dim(H) = 1$ 。

费米子场的量纲为

$$\dim(\psi) = \frac{3}{2} \quad (9.14)$$

这是由于

$$\because \mathcal{L}_0 = -(\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi + m\bar{\psi}\psi), \dim(\mathcal{L}_0) = 4 \quad \therefore \dim\psi = \frac{3}{2} \quad (9.15)$$

所以我们可以得到

$$b_i + \frac{3}{2}f_i + d_i + \dim(g_i) = 4 \quad (9.16)$$

例如

$$\because \dim(g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\partial_\mu\varphi) = 4 \quad \therefore \dim(g) = -1 \quad (9.17)$$

对比 (9.10) 和 (9.16) 可以得到结论

$$\delta_i = -\dim(g_i) \quad (9.18)$$

另外从式 (9.9) 可以看出, 如果所连接的外线已经确定, 则发散决定于耦合常数的量纲。

1. 超可重整: 外线给定时, 内线的顶点数越多, 则发散度越低。 $\dim[g_i] > 0$

例如在 $\lambda\varphi^3$ 中, 相应的拉氏量为 $\mathcal{L}_i = \lambda\varphi^3, \dim[\lambda] = 1$ 。其中 φ^3 的顶角如图 9.1(1) 中所示。自由场的拉氏量为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial_\mu\varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \quad (9.19)$$

如果考虑自能图 (如图 9.1(2)), 表面发散度为 $D = 4 - 4 = 0$, 所以是对数发散的。

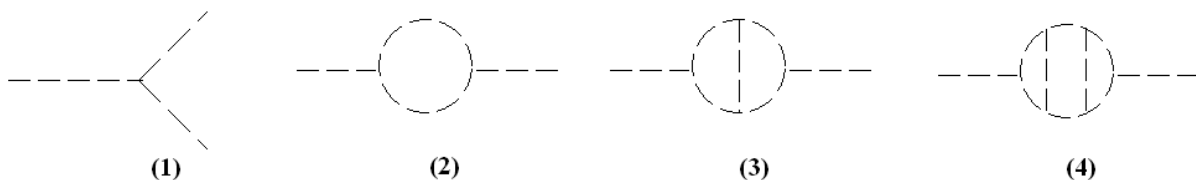


图 9.1: 超可重整的例子 $\lambda\varphi^3$

进一步观察, 如果增加内线的顶点数, 如图 9.1(3)(4) 中所示。表面发散度分别为 $D(3) = 4 \times 2 - 5 \times 2 = -2, D(4) = 3 \times 4 - 2 \times 8 = -4$, 很显然这两种情况都是收敛的。

另外还得注意抵消项的形式, 如在自能图 (如图 9.1(2)) 中, $\Sigma(p)$ 的展开形式可以表示为

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(p^2)|_{p^2=\mu^2} + \frac{\partial\Sigma(p^2)}{\partial p^2}\bigg|_{p^2=\mu^2} p^2 + \cdots \quad (9.20)$$

由于标量粒子的缘故, 所以 $\Sigma(p)$ 是 p^2 的函数。

在式 9.20 中, 对于 $\lambda\varphi^3$ 只有第一项是发散的, 所以相应的抵消项为 $\Sigma(\mu^2)\varphi^2 \sim \delta_m^2\varphi^2$, 相当于对质量重整化。如果第二项也是发散的, 则相应的抵消项的形式应为 $\left.\frac{\partial\Sigma(p^2)}{\partial p^2}\right|_{p^2=\mu^2}(\partial_\mu\varphi)(\partial_\mu\varphi)$, 相当于对动能项重整化。

2. 可重整: $\dim[g_i] = 0$ 。

例如: $\mathcal{L}_i = \lambda\varphi^4, f\bar{\psi}\psi\varphi, f'\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi$, 相应的 $\dim[\lambda] = \dim[f] = \dim[f'] = 0$ 。这就意味着如果 n_i 增加, 则发散度不会变化。这说明总可以引入有限数目的抵消项来重整化。

3. 不可重整: $\dim[g_i] < 0$, 对应的顶角为

$$\mathcal{L}_i = \lambda\varphi^5 (\text{并不存在}), G(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\psi) (\text{四费米子相互作用}), g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\partial_\mu\varphi \quad (9.21)$$

耦合常数的量纲为 $\dim[\lambda] = -1, \dim[G] = -2, \dim[g] = -1$ 。由于 $\delta_i = -\dim[g_i]$, 所以如果 n_i 增加, 则发散度也随着增加。

【问题】因为 π 介子的内禀宇称为 -1 , 所以与核子相互的顶角为 $f\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi$ 。

收敛性的判定: 一个 Feynman 图是收敛的, 仅当该图的表面发散度以及所有子图的表面发散度为负值。

如在 φ^3 理论中, 如图 9.2(1) 中所示, $D = 0$, 所以是对数发散的。而图 9.2(2) 中 $D = 4 \times 2 - 5 \times 2 = -2$, 但是子图中 $D = 0$ 是对数发散的。



图 9.2: 收敛性判定的例子 $\lambda\varphi^3$

§9.1.1 图形的 Taylor 展开

设一图形的外部动量为 $p_1, \dots, p_n$, 内部动量为 $q_1, \dots, q_l$ 。如图 9.3 所示。

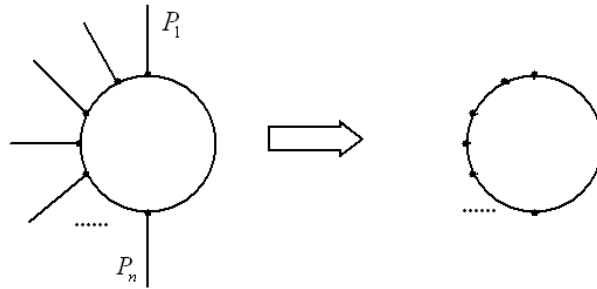


图 9.3: 收敛性判定的例子 $\lambda\varphi^3$

积分的形式为

$$\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \int d^4q_1 \dots d^4q_l I(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_l) \quad (9.22)$$

去掉外线后, 则可以看出 $\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ 可以对任意外线动量 p_i 作 Taylor 展开。

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \int d^4q_1 \dots d^4q_l \frac{\partial}{\partial p_i} I(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_l) \quad (9.23)$$

从而可以看出, 展开式中每一项的发散度依次为 $D(\Gamma), D(\Gamma) - 1, \dots, 0, -1, -2, \dots$, 而其中第一项 $D(\Gamma)$

即为零次项，依次类推。所以总共有 $D(\Gamma)A\# + 1$ 个发散，构成一个 $D(\Gamma)$ 次的发散多项式，从而可以针对它引入相应的抵消项。

例 1： $\lambda\varphi^3$ 中的自能图 (如图 9.4)

$$\Sigma(p) = \frac{\lambda^2}{2!} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \frac{1}{(k-p)^2 + \mu^2 - i\epsilon} \quad (9.24)$$

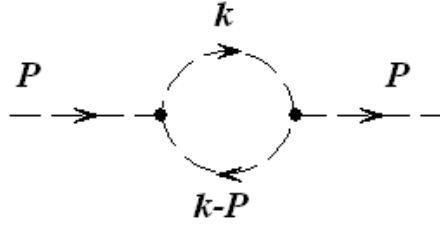


图 9.4: $\lambda\varphi^3$ 自能图

由于 $D = 0$ ，所以是对数发散，归结为零次多项式。

对于标量介子， $\Sigma(p)$ 是 p^2 的函数。一般的展开式为

$$\Sigma(p^2) = a'_0 + a'_1(p^2 - \mu^2) + a'_2(p^2 - \mu^2) + \cdots \quad (9.25)$$

取展开点 $\mu^2 = 0$ 。则可以得到

$$\begin{aligned} \Sigma(p^2) &= a_0 + a_1 p^2 + a_2 (p^2)^2 + \cdots \\ &= \Sigma(0) + \Sigma_c(p^2) \end{aligned} \quad (9.26)$$

发散项仅集中在 $\Sigma(0)$ 这一项，所以引入的抵消项为 $\Sigma(0)\varphi^2$ 。

例 2： $\lambda\varphi^4$ 自能图 (如图 9.5)， $D = 2$ 对应二次发散。

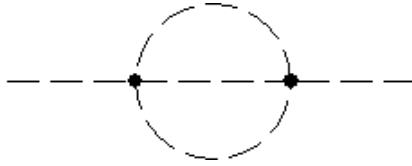


图 9.5: $\lambda\varphi^4$ 自能图

发散部分是一个二次多项式，取 $\mu^2 = 0$ 展开

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(0) + \frac{\partial \Sigma(p^2)}{\partial p^2}(0)p^2 + \Sigma_c(p^2) \quad (9.27)$$

其中零次项为二次发散，抵消项为 $\Sigma(0)\varphi^2$ ，一次项为对数发散，抵消项为 $\Sigma'(0)(\partial_\mu \varphi)(\partial_\mu \varphi)$ ，剩下的是收敛项。

例 3： QED 中电子自能。

$$\Sigma(p) = \Sigma(p)|_{\hat{p}=im} + S_f^{-1}(p)B + S_f^{-2}(p)\Sigma_f(p) \quad (9.28)$$

取展开点为 $\hat{p} = im$ ， $S_f^{-1}(p) = (2\pi)^4 i(\hat{p} + m) = (2\pi)^4 (-1)(\hat{p} - im)$ ，第一项本来为线性发散，但实际上为对数发散，第二项为对数发散。相应的抵消项为 $\Sigma(p)|_{\hat{p}=im} \bar{\psi}\psi, B(\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi)$ 。

例 4：真空极化

$$\Pi_{\mu\mu}(k^2) = \Pi_{\mu\mu}(0) + 3 \left[CD_f^{-1}(k) + \Pi_f(k) D_f^{-2}(k) \right] \quad (9.29)$$

展开点为 $k^2 = 0$ ， $D_f^{-1}(k) = (2\pi)^4 i k^2$ 。其中零次项对应二次发散，但是由于规范变换的要求这一项必须为零。方括号中第一项对应零次发散项，抵消项的形式为 $F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ ，第二项是收敛的。

§9.2 重整化和抵消项

一个拉氏量是可重整的，假如为了抵消 Feynman 图中的所有发散项而引入的抵消项(Counter Term)都能被原来的拉氏量中的参数和波函数的重新定义所吸收。

例如：QED 中

1. 重整化了的拉氏量（用它来构造传播函数）

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu \quad (9.30)$$

2. 抵消项 $\Delta\mathcal{L}$ ，为了消去由于 $\mathcal{L}$ 所产生的发散，必须引入抵消项 $\Delta\mathcal{L}$ 。

$$\Delta\mathcal{L} = \delta_m Z_2 \bar{\psi}\psi - (Z_2 - 1)(\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi) - \frac{1}{4}(Z_3 - 1)F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + ie(Z_1 - 1)\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu \quad (9.31)$$

其中 $Z_2 = 1 + B$ (自能)， $Z_3 = 1 + C$ (真空极化)， $Z_1^{-1} = 1 + L$ (顶角)。

3. $\Delta\mathcal{L}$ 可以归并入 $\mathcal{L}$ 中，成为 Unrenormalized 的拉氏量。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L} \\ &= -\bar{\psi}_0(\gamma_\mu \partial_\mu + m_0)\psi_0 - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + ie_0\bar{\psi}_0\gamma_\mu\psi_0 A_{\mu 0} \end{aligned} \quad (9.32)$$

其中 $m_0 = m - \delta_m$, $e_0 = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} e \xrightarrow{Z_1=Z_2} Z_3^{-1/2} e$, $\psi_0 = \sqrt{Z_2}\psi$, $A_{\mu 0} = \sqrt{Z_3}A_\mu$ 。

例如 $\lambda\varphi^4$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial_\mu\varphi) - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \quad (9.33)$$

表面发散度为 $D = 4 - B$ ，只有 $B = 2, B = 4$ 两种发散的可能性。

1. $B=2$, 如图 9.6 所示。其中零次项对应的抵消项为 φ^2 ，二次项对应的抵消项为 $(\partial_\mu\varphi)(\partial_\mu\varphi)$ ，而高次

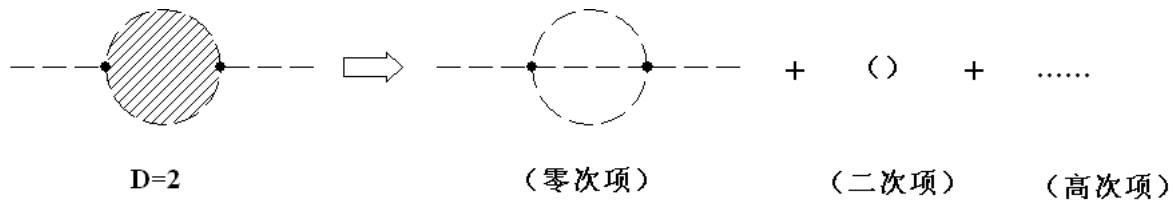


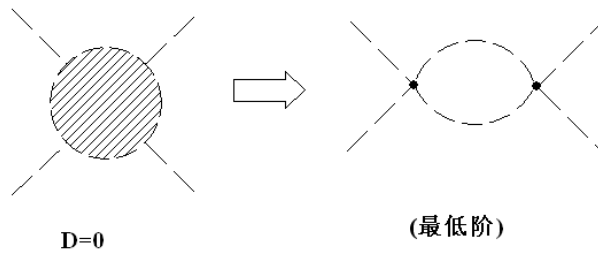
图 9.6: 连接两条标量外线 $\lambda\varphi^4$ 的发散分析图

项是收敛的。

2. $B=4$, 如图 9.7 所示。只有最低阶是发散的，抵消项的形式为 φ^4 。

最后拉氏量的形式为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial_\mu\varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \left[-\frac{A}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial_\mu\varphi) + \frac{B}{2}\varphi^2 + \frac{C}{4!}\varphi^4 \right] \\ &= -\frac{1}{2}Z_3(\partial_\mu\varphi)(\partial_\mu\varphi) - \frac{1}{2}(\mu^2 - \delta_\mu^2)\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}Z_1\varphi^4 \end{aligned} \quad (9.34)$$

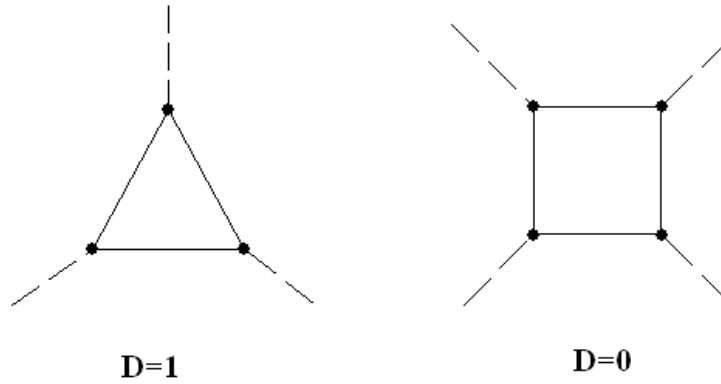
图 9.7: 连接四条标量外线 $\lambda\varphi^4$ 的发散分析图

其中 $Z_3 = 1 + A, B = \delta_\mu^2, C = \lambda(-Z_1 + 1)$, Z_1, Z_2, Z_3 都是 Cut off (Λ) dependent。所以

$$\mathcal{L} + \Delta\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_0)(\partial_\mu\varphi_0) - \frac{1}{2}\mu_0^2\varphi_0^2 - \frac{1}{4!}\lambda_0\varphi_0^4 \quad (9.35)$$

其中 $\varphi_0 = Z_3^{1/2}\varphi, \mu_0^2 = Z_3^{-1}(\mu^2 - \delta_\mu^2), \lambda_0 = Z_3^{-2}Z_1\lambda$ 。

另外 $\lambda\varphi^3$ 可以导出如图 9.8 所示的情况, 分别为一次发散和对数发散。对应的抵消项形式为 φ^3, φ^4 。

图 9.8: 含费米子内线 $\lambda\varphi^3$ 的发散分析图

而在 QED 中, 情况则稍有不同。(如图 9.9 所示)

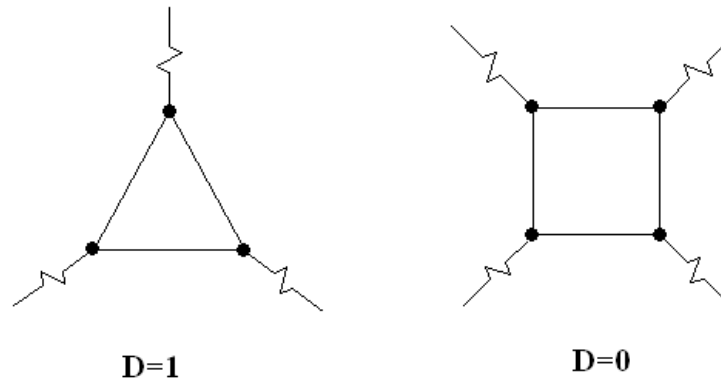


图 9.9: 含费米子内线光子的发散分析图

§9.3 维数正规化 (Dimenssional Regularization)

在 Pauli-Villas 正规化中圈图积分 $\int d^4k\{\dots\}$ 存在一个大动量截断 (cut off) Λ , 二次发散对应于 Λ^2 ,

一次发散对应 Λ ，对数发散对应于 $\ln \Lambda$ 。

1972 年，t'Hooft，Veltman 引入维数正规化的方法。

$$\int d^4 k \{ \dots \} \rightarrow \int d^n k \{ \dots \} \quad \text{维数 } 4 \rightarrow n \quad (9.36)$$

如图 9.10 所示的积分为

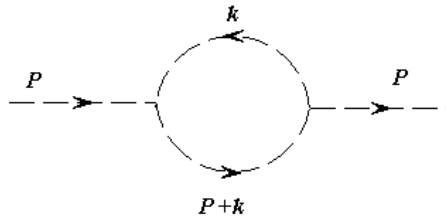


图 9.10: 介子自能图

$$I = \int d^4 k \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \frac{1}{(p+k)^2 + \mu^2 - i\epsilon} \quad (9.37)$$

定义积分

$$I(n) = \int d^n k \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \frac{1}{(p+k)^2 + \mu^2 - i\epsilon} \quad (9.38)$$

其中 $k_\mu = (ik_0, k_1, k_2, \dots, k_{n-1})$, $p_\mu = (ip_0, p_1, p_2, p_3, 0, \dots, 0)$ 。如果 $n \rightarrow 4$ ，则 $I(n) \rightarrow I$ 。

取 p_μ 静止系，即 $p_\mu = (iM, 0, \dots, 0)$ 则：

$$(p, k) = -Mk_0 \quad (9.39)$$

任一被积函数将与极坐标的角度无关。则

$$\int d^n k = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \int_0^\infty l^{n-2} dl \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi \sin \theta_2 d\theta_2 \int_0^\pi \sin^2 \theta_3 d\theta_3 \cdots \int_0^\pi \sin^{n-3} \theta_{n-2} d\theta_{n-2} \quad (9.40)$$

其中 l 是 $(ik_0, k_1, k_2, \dots, k_{n-1})$ 的变量。

利用 Γ 函数

$$\int_0^\pi \sin^m \theta d\theta = \frac{\pi^{1/2} \Gamma(m+1/2)}{\Gamma(m+2/2)} \quad (9.41)$$

其中 Γ 函数的一般性质如下：

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx \quad (9.42)$$

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi} \quad \Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \quad (9.43)$$

$$\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad (9.44)$$

所以

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi \sin \theta_2 d\theta_2 \int_0^\pi \sin^2 \theta_3 d\theta_3 \cdots \int_0^\pi \sin^{n-3} \theta_{n-2} d\theta_{n-2} \\ &= (2\pi) \left[\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3/2)} \right] \left[\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(2)} \right] \cdots \left[\sqrt{\pi} \frac{\Gamma((n-2)/2)}{\Gamma((n-1)/2)} \right] \end{aligned}$$

$$= 2\pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\Gamma((n-1)/2)} \quad (9.45)$$

从而可以得到

$$I(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \int_0^{\infty} l^{n-2} dl 2\pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\Gamma((n-1)/2)} \left\{ \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \frac{1}{(p+k)^2 + \mu^2 - i\epsilon} \right\} \quad (9.46)$$

$I(n)$ 不仅对 n 为整数有定义, 对于 n 为复数也有定义, 只要 $1 < \text{Re } n < 4$ ($n \leq 1$ 积分在 $l=0$ 处发散)。

对 $I(n)$ 进行解析延拓, 使得它在整个复平面内 (n 是宗量) 解析, 除了 $n=4, 6, 8, \dots, I(n)$ 有极点。

处理如图 9.10 所示的积分

$$\frac{1}{k^2 + \mu^2} \cdot \frac{1}{(p+k)^2 + \mu^2} = \int_0^1 \frac{d\alpha}{A^2} \quad (9.47)$$

其中

$$A = (1-\alpha)(k^2 + \mu^2) + \alpha((p+k)^2 + \mu^2) = (k + \alpha p)^2 + a^2, \quad a^2 = \mu^2 + \alpha(1-\alpha)p^2 \quad (9.48)$$

从而

$$I(n) = \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^n k}{(k + \alpha p)^2 + a^2} \xrightarrow{n \leq 4} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^n k}{(k^2 + \alpha^2)^2} \quad k^2 = \mathbf{k}^2 - k_0^2 \quad (9.49)$$

进行 Wick 转动, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= i \int \frac{d^n k}{(k^2 + \alpha^2)^2} = \frac{i\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^{\infty} \frac{r^{n-2} dr^2}{(r^2 + a^2)^2} = \frac{i\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^{\pi} \frac{t^{n/2-1} dt}{(t + a^2)^2} \\ &= \frac{i\pi^{n/2}}{(a^2)^{2-n/2}} \Gamma(2-n/2) = \frac{i\pi^{n/2}}{(a^2)^{2-n/2}} \Gamma\left(\frac{4-n}{2}\right) \end{aligned} \quad (9.50)$$

附: β 函数 (这中间要用到下面的关系式)

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}} dy = B(m, n) \equiv \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \quad (9.51)$$

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (9.52)$$

积分为

$$I(n) = \int_0^1 \frac{i\pi^{n/2}\Gamma(2-n/2)}{[\mu^2 + \alpha(1-\alpha)p^2]^{2-n/2}} d\alpha \quad (9.53)$$

注意, 该式是在 $n < 4$ 且 n 为整数 ($n=3$) 的情况得到的; 但是对于 $n < 4$ 的所有非整数都有定义。另外

$$\Gamma(2-n/2) = \frac{\Gamma(3-n/2)}{2-n/2}, \therefore n \rightarrow 4, \Gamma(2-n/2) \rightarrow \frac{4}{4-n} \quad (9.54)$$

所以在 $n=4$ 的地方对 $\Gamma(2-n/2)$ 进行展开, 得到

$$\Gamma(2-n/2) = \frac{2}{4-n} + A + (n-4)B \quad (9.55)$$

利用 $y^\epsilon = e^{\ln y^\epsilon} = e^{\epsilon \ln y} = 1 + \epsilon \ln y + \dots (\epsilon \rightarrow 0)$, 可以得到

$$(a^2)^{n/2-2} = 1 + \frac{n-4}{2} \ln a^2 + \dots \quad (9.56)$$

所以

$$I(n) \xrightarrow{n \rightarrow 4} \frac{2i\pi^2}{4-n} + i\pi^2 A - i\pi^2 \int_0^1 d\alpha \ln(\mu^2 + \alpha(1-\alpha)p^2) + O(n-4) \quad (9.57)$$

其中第一项当 $n \rightarrow 4$ 时发散, 相当于 Pauli - Villas 正规化中的 $\ln \Lambda$ 项。

对于参考点的选取问题, 奇异项的差别不大, 但是会影响到重整化以后的形式, 不同参考点可得到不同的重整化参数。例如:

$$\Sigma(p) = \Sigma(p)|_{p^2=\mu^2} + \Sigma'(p)|_{p^2=\mu^2}(p^2 - \mu^2) + \cdots \quad (9.58)$$

如果取 $\mu^2 = 0$, 对应电荷重整化 $e_R(\mu^2 = 0)$, 相应的精细结构常数为 $\alpha \doteq 1/137$, 但是如果取 $\mu^2 = M_z^2$, 则 $\alpha(\mu^2 = M_z^2) = 1/128$ 。

定义

$$\begin{aligned} \Gamma_a(p^2) &\equiv \lambda^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \cdot \frac{1}{(p+k)^2 + \mu^2 - i\epsilon} \\ &= \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \left\{ \frac{2i}{4-n} + iA - i \int_0^1 d\alpha \ln [\mu^2 + \alpha(1-\alpha)p^2] \right\} \end{aligned} \quad (9.59)$$

在 $p^2 = 0$ 处取 Taylor 展开, 则

$$\Gamma_a(p^2) = \Gamma_a(0) + \Gamma_c(p^2) \quad (9.60)$$

发散项集中在第一项。

$$\Gamma_a(0) = \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \left\{ \frac{2i}{4-n} + iA - i \int_0^1 d\alpha \ln \mu^2 \right\} = \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \left[\frac{2i}{4-n} + iA - i \ln \mu^2 \right] \quad (9.61)$$

$$\Gamma_c(p^2) = \frac{i\lambda^2}{16\pi^2} \int_0^1 \ln \left[\frac{\mu^2 + \alpha(1-\alpha)p^2}{\mu^2} \right] d\alpha \xrightarrow{\text{分部积分}} \frac{-i\lambda^2}{16\pi^2} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)(1-2\alpha)}{[\mu^2 + \alpha(1-\alpha)p^2]} p^2 \quad (9.62)$$

两种正规化的区别

	Pauli-Villas 正规化	维数正规化
$\Gamma_a(0)$	$\frac{i\lambda^2}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2}$	$\frac{i\lambda^2}{16\pi^2} \frac{2}{4-n}$

而有限的修正部分 $\Gamma_c(p^2)$ 对于两种正规化应都是相同的。

$$I(\alpha, \beta) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^4} \frac{(-k^2)^\beta}{(-k^2 - a^2)^\alpha} = i \frac{\pi^{n/2} (-1)^{\beta-\alpha}}{(2\pi)^4 \Gamma(n/2)} \cdot \frac{\Gamma(\beta + n/2) \Gamma(\alpha - \beta - n/2)}{\Gamma(\alpha) (a^2)^{\alpha-\beta-n/2}} \quad (9.63)$$

二次发散积分

$$I(1, 0) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{-k^2 - a^2} = \frac{(-i)\pi^{n/2}}{(2\pi)^4} \cdot \frac{\Gamma(1 - n/2)}{(a^2)^{1-n/2}} \quad (9.64)$$

$$I(2, 1) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-k^2}{(-k^2 - a^2)^2} = \frac{(-i)\pi^{n/2}}{(2\pi)^4} \frac{n}{2} \cdot \frac{\Gamma(1 - n/2)}{(a^2)^{1-n/2}} \quad (9.65)$$

对数发散

$$I(2, 0) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(-k^2 - a^2)^2} = \frac{i\pi^{n/2}}{(2\pi)^4} \cdot \frac{\Gamma(2 - n/2)}{(a^2)^{2-n/2}} \quad (9.66)$$

$$I(3, 1) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-k^2}{(-k^2 - a^2)^3} = \frac{i\pi^{n/2}}{(2\pi)^4} \cdot \frac{\Gamma(2 - n/2)}{(a^2)^{2-n/2}} \cdot \frac{n}{4} \quad (9.67)$$

$$I(4, 2) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^4}{(-k^2 - a^2)^4} = \frac{i\pi^{n/2}}{(2\pi)^4} \cdot \frac{\Gamma(2 - n/2)}{(a^2)^{2-n/2}} \cdot \frac{n}{4} \cdot \frac{n+2}{6} \quad (9.68)$$